Esercizio 1. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino la retta r ed il suo punto P, definiti da

$$r : \begin{cases} x + y + 3z = -1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad , \qquad P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Si verifichi che P è un punto di r e si scriva l'equazione cartesiana del cono $\mathscr{C}$, di asse r, vertice P e semiapertura $\frac{\pi}{4}$.

(b) Si determinino i punti di intersezione, Q_1 e Q_2, tra il cono $\mathscr{C}$ e la retta s, di equazione

$$s : \begin{cases} x - y - z = 2 \\ 3x - 3y - 2z = 4 \end{cases} .$$

(c) Si determini, nel fascio di asse s, un piano π ortogonale alla retta r e si scrivano le coordinate del punto $\{Q_3\} = \pi \cap r$.

(d) Si calcoli il volume del tetraedro di vertici P, Q_1, Q_2, Q_3.

Esercizio 2. Nello spazio tridimensionale si consideri il tetraedro Δ, di vertici

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Si calcoli il volume V di Δ.

(b) Si consideri il piano π di equazione $2x + y - 3z + 1 = 0$; si mostri che l'intersezione di Δ con π è un triangolo e se ne calcolino i vertici.

(c) Si calcoli l'area del triangolo del punto precedente.

Esercizio 3. Si considerino le due rette

$$r_1 : \begin{cases} X - Z - 2 = 0 \\ Y - Z - 1 = 0 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} X + Y + 2 = 0 \\ Y + Z + 2 = 0 \end{cases}$$

nello spazio euclideo reale di dimensione 3.

(a) Mostrare che le due rette sono sghembe e calcolarne la distanza reciproca.

(b) Trovare l'unica retta n incidente sia r_1 che r_2 ed ortogonale ad entrambe. Trovare i punti $\{P_1\} = r_1 \cap n$ e $\{P_2\} = r_2 \cap n$.

(c) Trovare l'unica retta t passante per il punto Q di coordinate $(2, 2, -2)$ ed incidente sia r_1 che r_2. Trovare i punti $\{Q_1\} = r_1 \cap t$ e $\{Q_2\} = r_2 \cap t$.

(d) Calcolare il volume del tetraedro di vertici P_1, P_2, Q_1, Q_2 (può essere zero?) e l'area del triangolo di vertici P_1, Q_1, Q_2 (può essere zero?).

Esercizio 4. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$, si considerino i piani

$$\sigma_1 : \begin{cases} x_1 - x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_4 = -1 \end{cases} \quad , \quad \sigma_2 : \begin{cases} x_1 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \qquad \text{e la retta} \quad r : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases} .$$

(a) Si mostri che σ_1 e σ_2 hanno in comune un unico punto P e si determinino le coordinate di tale punto.

(b) Si mostri che la retta r interseca entrambo i piani e si determinino le coordinate dei punti $\{Q_1\} = r \cap \sigma_1$ e $\{Q_2\} = r \cap \sigma_2$.

(c) Si determinino il baricentro G e l'area del triangolo PQ_1Q_2.

(d) Si scrivano le equazioni cartesiane del piano π, passante per G e perpendicolare al piano contenente il triangolo PQ_1Q_2.

Esercizio 5. Nello spazio $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$, dotato di un riferimento ortonormale, si consideri la sottovarietà lineare

$$\pi : \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} .$$

(a) Si determinino un punto, il sottospazio direttore e la dimensione di π.

(b) Si consideri la famiglia di sottovarietà lineari,

$$L_t : \begin{cases} (2-t)x_1 + (t-1)x_4 = t \\ x_2 + tx_3 + (2-t)x_4 = 1-t \\ (2-t)x_1 + tx_2 = 2t \end{cases}, \qquad \text{al variare di } t \in \mathbb{R}.$$

Si calcoli la dimensione di L_t al variare di t.

(c) Detta L_2 la sottovarietà della famiglia, per $t = 2$, si verifichi che π ed L_2 sono sghembe e si determini la distanza tra π ed L_2.

Esercizio 6. Nello spazio tridimensionale si consideri il tetraedro Δ, di vertici

$$P_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Si calcoli il volume V di Δ.

(b) Si considerino il punto $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ ed il piano $\sigma : y = -4$. Dato un punto X dello spazio, non contenuto nel piano per Q, parallelo a σ, si definisce la sua proiezione, X', dal punto Q sul piano σ come il punto di intersezione tra la retta per X e Q ed il piano σ (in simboli $\{X'\} = (X \vee Q) \cap \sigma$). Si determinino le proiezioni $P'_0, \dots, P'_3$ dei vertici di Δ dal punto Q sul piano σ.

(c) Si calcolino le coordinate baricentriche del punto P'_3 rispetto ai punti P'_0, P'_1, P'_2.

(d) Si calcoli l'area A della proiezione di Δ.

Esercizio 7. Nello spazio tridimensionale si consideri il tetraedro Δ, di vertici

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Si calcoli il volume V di Δ.

(b) Si consideri la retta r, passante per l'origine e parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si determinino gli estremi del segmento Q_1Q_2, costituito dai punti di r che cadono all'interno di Δ e se ne calcoli la lunghezza.

(c) Considerando la retta r orientata concordemente al vettore v, si dica in quale faccia del tetraedro la retta "entra" e da quale faccia "esce"[1].

Esercizio 8. Nello spazio euclideo tridimensionale, dotato di un riferimento ortonormale, sia dato il triangolo di vertici

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino l'area del triangolo PQR e l'equazione del piano π_1 che lo contiene.

(b) Indicato con π_0 il piano di equazione $z = 0$, si determinino (se esistono) dei punti X tali che la proiezione su π_0, di centro X, del triangolo PQR sia un triangolo equilatero.

(c) Si determinino (se esistono) dei punti Y tali che la proiezione su π_0 del triangolo PQR sia un triangolo avente la stessa area del triangolo originale.

Esercizio 9. Nello spazio euclideo E^3, dotato di un riferimento ortonormale, si consideri l'affinità di matrice

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \sqrt{2}+1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

(a) Si verifichi che X è la matrice di un'isometria (orientata) priva di punti uniti.

(b) Si scriva l'isometria X come composizione di una rotazione seguita da una traslazione parallela all'asse di rotazione.

[1] Per indicare una faccia del tetraedro è sufficiente dire quali sono i suoi tre vertici.

Esercizio 10. Si considerino nello spazio euclideo le rette di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 1 \end{cases} .$$

(a) Si scriva la matrice di una rotazione di angolo $\pi/4$ attorno all'asse r.

(b) Si scrivano le coordinate di un vettore parallelo alla retta che si ottiene ruotando s di un angolo di $\pi/4$ attorno all'asse r.

Esercizio 11. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

(a) determinare il sottospazio ortogonale a $\langle v_1, v_2 \rangle$;

(b) decomporre il vettore $w = {}^t(1, -1, -9)$ come somma $w = w_1 + w_2 + w_3$ ove w_1 sia parallelo a v_1, w_2 sia parallelo a v_2 e w_3 sia ortogonale sia a v_1 che a v_2.

(c) mostrare che i volumi dei tre tetraedri determinati rispettivamente da $\{w, w_1, w_2\}$, $\{w, w_1, w_3\}$ e $\{w, w_2, w_3\}$ sono uguali tra loro.

Esercizio 12. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} .$$

(a) calcolare l'angolo formato da v e w;

(b) determinare, se ne esistono, tutti i vettori che formano due angoli uguali di ampiezza 30° con v e w;

(c) determinare, se ne esistono, tutti i vettori che formano due angoli uguali di ampiezza 60° con v e w;

(d) determinare, se ne esistono, tutti i vettori che formano due angoli uguali di ampiezza 90° con v e w;

(e) dire se i tre sottinsiemi di $\mathbb{R}^3$ prima trovati sono o no sottospazi vettoriali.

Esercizio 13. Nello spazio euclideo orientato si consideri l'affinità f di matrice

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

rispetto ad un riferimento ortonormale (concorde con l'orientamento fissato).

(a) Si verifichi che si tratta di una rotazione e se ne determinino l'asse e l'angolo di rotazione.

(b) Dato il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, si determinino il centro ed il raggio dell'arco di circonferenza descritto da P nella rotazione f.

Esercizio 14. Siano u un vettore di lunghezza 1 in $\mathbb{R}^3$ ed $A \in O_3(\mathbb{R})$.

(a) Si mostri che se A è la matrice di una rotazione di un angolo $\vartheta \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) attorno all'asse $\langle u \rangle$, allora i sottospazi di autovettori di A (in $\mathbb{C}^3$) non dipendono dall'angolo ϑ.

(b) Si mostri che A è la matrice di una rotazione di asse $\langle u \rangle$ se, scelta (comunque) una base ortonormale, $\{v, w\}$, del sottospazio $\langle u \rangle^\perp$, tale che $\{u, v, w\}$ sia concorde con l'orientamento fissato, allora si ha $Au = u$ e $v + iw$ è un autovettore per A ($i^2 = -1$).

Esercizio 15. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ si considerino i piani (per l'origine)

$$\pi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \text{e} \qquad \sigma : 2x - 3y + z = 0.$$

(a) Si scriva la matrice A, rispetto alla base canonica, della simmetria $\phi_\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di asse π.

(b) Si scriva la matrice B, rispetto alla base canonica, della simmetria $\phi_\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di asse σ.

(c) Si consideri l'applicazione composta $\phi = \phi_\pi \circ \phi_\sigma$. È vero o falso che ϕ è una rotazione? In caso affermativo se ne determinino l'asse e l'angolo di rotazione.