Esercizio 1 (Cilindro)**.** Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^n$, siano fissati un punto, P_0, un vettore, $v_0 \neq 0$, ed un numero reale $d \in [0, +\infty)$. Si chiama *cilindro* di asse $r = P_0 + \langle v_0 \rangle$ e raggio d, l'insieme dei punti che hanno distanza d dalla retta r, ovvero l'insieme

$$C_{r,d} = \left\{ X \in \mathbb{E}^n \,\middle|\, \|X - P_0\|^2 - \frac{[(X - P_0) \cdot v_0]^2}{v_0 \cdot v_0} = d^2 \right\}.$$

(a) Si verifichi che la definizione è coerente e che $C_{r,0}$ coincide con la retta r.

(b) Si verifichi che, in $\mathbb{E}^3$, si ha

$$C_{r,d} = \left\{ X \in \mathbb{E}^3 \,\middle|\, \frac{\|(X - P_0) \times v_0\|}{\|v_0\|} = d \right\}.$$

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ si consideri la retta, r, di equazioni cartesiane $r : \begin{cases} X_1 + X_2 = 0 \\ X_2 - X_3 = 1 \end{cases}$.
Si determini l'equazione del cilindro di asse r, contenente l'origine di $\mathbb{E}^3$.

Esercizio 3. Si determinino le equazioni per il luogo dei punti in $\mathbb{E}^3$ equidistanti da due rette, distinguendo i casi in cui le due rette, $r_1 = P_1 + \langle v_1 \rangle$ ed $r_2 = P_2 + \langle v_2 \rangle$, siano incidenti, parallele o sghembe.

Esercizio 4 (Cono)**.** Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^n$, siano fissati un punto, P_0, un vettore, $v_0 \neq 0$, ed un angolo $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Si chiama *cono* di asse $r = P_0 + \langle v_0 \rangle$ ed apertura ϑ, l'insieme dei punti, X, tali che la retta $X \vee P_0$ formi un angolo ϑ con la retta r, unito al punto P_0, ovvero l'insieme

$$\mathscr{C}_{r,\vartheta} = \left\{ X \in \mathbb{E}^n \,\middle|\, \cos^2\vartheta \|X - P_0\|^2 - \frac{[(X - P_0) \cdot v_0]^2}{v_0 \cdot v_0} = 0 \right\}.$$

(a) Si verifichi che la definizione è coerente e che $\mathscr{C}_{r,0} = C_{r,0}$ coincide con la retta r.

(b) Si verifichi che, quando $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, l'equazione del cono coincide con il quadrato dell'equazione del piano per P_0 ortogonale a v_0.

Esercizio 5. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$, siano fissati il punto, O (l'origine), ed il vettore e_1 della base canonica.

(a) Si scriva l'equazione del cono di asse $r = O + \langle e_1 \rangle$ ed apertura $\vartheta = \frac{\pi}{3}$.

(b) Si determinino le intersezioni del cono con gli iperpiani ortogonali ad r.

(c) Si determinino le intersezioni del cono con le sottovarietà lineari contenenti r.

Esercizio 6 (altri coni)**.** Nello spazio euclideo, $\mathbb{E}^n$, siano fissati un punto, P_0, ed una curva, C. Si chiama *cono* di vertice P_0, proiettante la curva C, l'insieme dei punti appartenenti a rette congiungenti P_0 con un punto di C.

(a) In $\mathbb{E}^3$, sia $P_0 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ e C la circonferenza di centro $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ e raggio 1, posta nel piano $\pi : Z = 1$. Si determini l'equazione cartesiana soddisfatta dai punti del cono di vertice P_0, proiettante C.

(b) In $\mathbb{E}^3$, sia $P_0 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ e C l'iperbole di equazioni $C : \begin{cases} XY = 2 \\ Z = 1 \end{cases}$. Si determini l'equazione cartesiana soddisfatta dai punti del cono di vertice P_0, proiettante C.

Esercizio 7. Siano $\mathbb{L}$ ed $\mathbb{M}$ due sottovarietà lineari parallele della stessa dimensione, k, in $\mathbb{A}^n$ e sia dato un punto, $C \notin \mathbb{L} \cup \mathbb{M}$, tale che $\mathbb{L} \vee C = \mathbb{M} \vee C$. Si mostri che la corrispondenza che a un punto, $X \in \mathbb{L}$ associa $p_C(X) = (X \vee C) \cap \mathbb{M}$ è un'applicazione ben definita $p_C : \mathbb{L} \to \mathbb{M}$ e che tale applicazione è un'affinità.

Esercizio 8. Siano $\mathbb{L}$ ed $\mathbb{M}$ due sottovarietà lineari della stessa dimensione, k, in $\mathbb{A}^n$ e sia data una sottovarietà, lineare, $\mathbb{K}$, sghemba con $\mathbb{L}$ ed $\mathbb{M}$ e tale che $\mathbb{L} \vee \mathbb{K} = \mathbb{M} \vee \mathbb{K}$.

(a) Si mostri che la corrispondenza che a un punto, $X \in \mathbb{L}$ associa $p_{\mathbb{K}}(X) = (X \vee \mathbb{K}) \cap \mathbb{M}$ è un'applicazione ben definita su tutto $\mathbb{L}$ se, e solo se, $\mathbb{L}$ ed $\mathbb{M}$ sono parallele.

(b) Nel caso in cui $\mathbb{L}$ ed $\mathbb{M}$ non siano parallele, si determini, se esiste, il massimo sottoinsieme di $\mathbb{L}$ dove è definita $p_{\mathbb{K}}$. Si tratta ancora di un'affinità?

(c) Supponiamo $\mathbb{L}$ ed $\mathbb{M}$ parallele e distinte e sia $C = (\mathbb{L} \vee \mathbb{M}) \cap \mathbb{K}$. Si mostri che C è un punto e che $\mathbb{L} \vee C = \mathbb{M} \vee C$. Che relazioni ci sono tra l'applicazione $p_{\mathbb{K}}$ e l'applicazione p_C definita nell'esercizio 7.

Esercizio 9. Siano $\mathbb{L}$ ed $\mathbb{M}$ due sottovarietà lineari della stessa dimensione, k, in $\mathbb{A}^n$ e sia data una sottovarietà, lineare, $\mathbb{K}$, sghemba con $\mathbb{L}$ ed $\mathbb{M}$ e tale che $\mathbb{L} \vee \mathbb{K} = \mathbb{M} \vee \mathbb{K}$.

(a) Si mostri che la corrispondenza che a un punto, $X \in \mathbb{L}$ associa $p_{\mathbb{K}}(X) = (X \vee \mathbb{K}) \cap \mathbb{M}$ è un'applicazione ben definita su tutto $\mathbb{L}$ se, e solo se, $\mathbb{L}$ ed $\mathbb{M}$ sono parallele.

(b) Nel caso in cui $\mathbb{L}$ ed $\mathbb{M}$ non siano parallele, si determini, se esiste, il massimo sottoinsieme di $\mathbb{L}$ dove è definita $p_{\mathbb{K}}$.

Esercizio 10. Notazioni come nell'esercizio 7.

(a) Fissato un punto $X \in \mathbb{L}$ sia λ_0 lo scalare definito da $p_C(X) - C = \lambda_0(X - C)$. Si mostri che λ_0 non dipende dalla scelta del punto X.

(b) Fissato due punti, $X, Y \in \mathbb{L}$, si mostri che $p_C(Y) - p_C(X) = \lambda_0(Y - X)$.

Esercizio 11 (Teorema di Talete?)**.** Siano dati in $\mathbb{A}^n$ due rette, r ed s, incidenti in un punto C, e tre iperpiani distinti, $\mathbb{L}_1$, $\mathbb{L}_2$, $\mathbb{L}_3$, paralleli tra loro, ma non paralleli a una delle due rette (fare un disegno per $n = 2$ ed $n = 3$). Si deduca dagli esercizi precedenti che, posto $R_i = r \cap \mathbb{L}_i$ ed $S_i = s \cap \mathbb{L}_i$, per $i = 1, 2, 3$, si ha $\frac{R_3 - R_1}{R_2 - R_1} = \frac{S_3 - S_1}{S_2 - S_1}$.

Esercizio 12 (punti notevoli di un triangolo)**.** Nel piano euclideo, siano A, B, C i vertici di un triangolo non degenere ed indichiamo con $a = \|B - C\|$, $b = \|C - A\|$, $c = \|B - A\|$, le lunghezze dei lati e con $p = a + b + c$ il perimetro.

(a) Si mostri che il punto di intersezione delle bisettrici del triangolo (*incentro*) è il punto

$$I = \frac{a}{p} A + \frac{b}{p} B + \frac{c}{p} C.$$

(b) Posto $v = B - A$ e $w = C - A$, si mostri che l'intersezione delle altezze del triangolo (*ortocentro*) è il punto

$$H = \frac{(v \cdot v - v \cdot w)(w \cdot w - v \cdot w)}{(v \cdot v)(w \cdot w) - (v \cdot w)^2} A + \frac{(v \cdot w)(w \cdot w) - (v \cdot w)^2}{(v \cdot v)(w \cdot w) - (v \cdot w)^2} B + \frac{(v \cdot v)(v \cdot w) - (v \cdot w)^2}{(v \cdot v)(w \cdot w) - (v \cdot w)^2} C.$$

(c) Si mostri che l'intersezione degli assi dei del triangolo (*circocentro*) è il punto

$$K = \frac{(v \cdot w)(v \cdot v + w \cdot w - 2v \cdot w)}{2[(v \cdot v)(w \cdot w) - (v \cdot w)^2]} A + \frac{(w \cdot w)(v \cdot v - v \cdot w)}{2[(v \cdot v)(w \cdot w) - (v \cdot w)^2]} B + \frac{(v \cdot v)(w \cdot w - v \cdot w)}{2[(v \cdot v)(w \cdot w) - (v \cdot w)^2]} C.$$

Esercizio 13 (retta di Eulero)**.** Nel piano euclideo, siano A, B, C i vertici di un triangolo non degenere e ricordiamo che il baricentro è il punto $M = \frac{1}{3}(A + B + C)$.

(a) Si mostri che il baricentro, l'ortocentro ed il circocentro del triangolo sono allineati. La retta contenente questi tre punti è detta la *retta di Eulero*.

(b) Si mostri che l'incentro giace sulla retta di Eulero se, e solo se, il triangolo è isoscele.

(c) Dati i tre punti notevoli I, M ed H è possibile ricostruire i vertici del triangolo A, B, C?

Esercizio 14. Si consideri $\mathbb{C}^n$ con il prodotto scalare hermitiano, $\langle v \,|\, w \rangle = \bar{z}_1 w_1 + \cdots + \bar{z}_n w_n$, ove $v = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$.

(a) Sia $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_k\}$ una base ortonormale di un sottospazio W e sia dato un vettore $v \in \mathbb{C}^n$. Si verifichi che il vettore $v_0 = \sum_{i=1}^{k} \langle u_i \,|\, v \rangle \, u_i$ è la proiezione ortogonale di v su W (ovvero $v_0 \in W$ e $v - v_0 \in W^{\perp}$).

(b) Sia $U \in M_{n \times k}(\mathbb{C})$ la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori $u_1, \dots, u_k$ in base canonica (ovvero $U = \alpha_{\mathcal{U}, \mathcal{E}}(j)$ ove $j : W \to \mathbb{C}^n$ è l'inclusione naturale). Si verifichi che $A = U {}^t\bar{U}$ è la matrice in base canonica della proiezione ortogonale sul sottospazio W.

Esercizio 15. La matrice $A = \begin{pmatrix} 3+i & 1 \\ 1 & 3-i \end{pmatrix}$ è simmetrica. È vero o falso che A è diagonalizzabile? Si determini la forma di Jordan di A.

Esercizio 16. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice antisimmetrica (${}^tA = -A$). Si mostri che A è unitariamente diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ e che tutti i suoi autovalori sono numeri puramente immaginari.