Esercizio 1. Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di uno spazio vettoriale V sul campo C. Dimostrare che ognuna delle seguenti "operazioni elementari"
i) scambiare di posto due vettori della base
ii) moltiplicare un vettore della base per uno scalare $c \in C$ non nullo
iii) sostituire il vettore v_i con il vettore $v_i + cv_j$ con $c \in C$ e $i \neq j$
trasforma la base $\mathcal{V}$ in una base di V.

Dimostrare poi che le operazioni elementari trasformano famiglie di generatori in famiglie di generatori e sottoinsiemi linearmente indipendenti in sottoinsiemi linearmente indipendenti.
È vero che, prese comunque due basi, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$, di V, si può trasformare $\mathcal{V}$ in $\mathcal{W}$ con una sequenza finita di operazioni elementari? (...farsi qualche esempio!)

Esercizio 2. Si considerino i vettori $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ nello spazio $\mathbb{Q}^3$.

(*a*) Si verifichi che $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, u_3\}$ è una base di $\mathbb{Q}^3$.

(*b*) Si trasformi $\mathcal{U}$ nella base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ tramite operazioni elementari.

(*c*) Si scrivano i vettori della base canonica come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{U}$.

Esercizio 3. Si considerino i vettori $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, nello spazio $\mathbb{R}^4$.

(*a*) Si verifichi che $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$.

(*b*) Si trasformi $\mathcal{U}$ nella base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ tramite operazioni elementari.

(*c*) Si scrivano i vettori della i vettori della base $\mathcal{U}$ come combinazione lineare dei vettori della base canonica ed i vettori della base canonica come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{U}$.

Esercizio 4. Si considerino nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ il sottospazio $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 - x_3 = 0 \right\}$ ed il vettore $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(*a*) Si verifichi che $\mathbb{R}^3 = U \oplus \langle v \rangle$.

(*b*) Sia $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione che ad ogni vettore $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$ associa quell'unico vettore $\pi(x) \in U$, tale che $x = \pi(x) + \alpha v$, per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$. Si scrivano esplicitamente le coordinate del vettore $\pi(x)$ in funzione delle coordinate di x e si verifi che che si tratta di un'applicazione lineare.

(*c*) Si determinino nucleo ed immagine di π.

Esercizio 5. Sia $C[X]$ lo spazio vettoriale di tutti i polinomi a coefficienti nel corpo C

(*a*) Si verifichi che l'applicazione $\mu : P(X) \mapsto XP(X)$, che ad ogni polinomio $P(X)$ associa il suo prodotto con X è un'applicazione lineare.

(*b*) Si verifichi che l'applicazione, $\delta : C[X] \to C[X]$, che associa al polinomio $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$, la sua derivata rispetto ad X, ovvero $P'(X) = a_1 + 2a_2X + \cdots + na_nX^{n-1}$, è un'applicazione lineare.

(*c*) Si determinino nucleo ed immagine per le due applicazioni ai punti precedenti

(*d*) Si determini l'immagine di un polinomio, $P(X)$, tramite l'applicazione $\delta \circ \mu - \mu \circ \delta$.

Esercizio 6. Si considerino gli spazi vettoriali $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^2$ e la base canonica, $\{e_1, e_2, e_3\}$, di $\mathbb{R}^3$. Detta $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare che manda i vettori della base canonica ordinatamente sui vettori $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$; si scrivano esplicitamente le coordinate (in base canonica) dell'immagine di un generico vettore $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 7. Dimostrare che se $f : V \to W$ è una applicazione lineare allora l'immagine di un sottospazio di V è ancora un sottospazio di We l'antiimmagine di un sottospazio di W è un sottospazio di V.

Esercizio 8. Si consideri l'applicazione lineare di $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f\left({}^t(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)\right) = \left({}^t(x_1 + x_2 - 2x_3, 3x_1 + 3x_2 - x_4, -2x_2 + 2x_5)\right).$$

(a) Determinarne nucleo ed immagine. Chi è l'antiimmagine del vettore ${}^t(1,0,1)$? E l'antiimmagine di ${}^t(0,0,0)$ a quale sottospazio corrisponde?

(b) Si dica se f è suriettiva e, in caso affermativo, si determinino tutte le possibili inverse destre di f.

Esercizio 9. Si considerino gli spazi vettoriali reali V e W con le rispettive basi: $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$.

(a) Si determini l'applicazione lineare $\phi\colon V \to W$, così definita dalle condizioni:

$$\phi(v_1) = w_1 - w_2, \qquad \phi(v_2) = 2w_2 - 6w_3,$$
$$\phi(v_3) = -2w_1 + 2w_2, \qquad \phi(v_4) = w_2 - 3w_3.$$

(b) Si determinino le dimensioni dei sottospazi $\ker\phi$ ed $\operatorname{im}\phi$ e si scrivano delle basi per tali sottospazi.

(c) È vero o falso che $w_1 + w_2 + w_3 \in \operatorname{im}\phi$?

Esercizio 10. Dopo aver identificato il piano $\mathbb{C}$ dei numeri complessi con lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$, si dimostri che la moltiplicazione di $z = x + iy$ con il numero complesso $e^{i\pi/4} = \sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$ è una applicazione lineare di $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Determinarne la matrice rispetto alla base canonica $\{1, i\}$. Geometricamente a cosa corrisponde?

Esercizio 11. Si indichi con $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$ la base canonica di $V = \mathbb{C}^4$ e si considerino i seguenti sottospazi (complessi) di V

$$E = \langle e_1, e_2 \rangle \quad \text{e} \quad D = \langle e_3 - (1+3i)e_1, e_4 - 2ie_2 \rangle .$$

(a) Si dimostri che $V = E \oplus D$.

(b) Si indichino con $\pi\colon E \oplus D \to E$ la proiezione ($d + e \mapsto e$) e con L il sottospazio reale di V generato dalla base canonica. Si dimostri che la restrizione di π ad L è un isomorfismo di spazi vettoriali reali.

(c) Si osservi che, tramite l'isomorfismo del punto precedente, la moltiplicazione per i dei vettori del sottospazio E diviene un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare dello spazio L in sé. Si scriva la matrice J di tale endomorfismo rispetto alla base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ di L.

Esercizio 12. Siano V e W due spazi vettoriali sul campo C ed indichiamo con $\operatorname{Hom}_C(V, W)$ l'insieme delle applicazioni C-lineari di V su W.

(a) Si mostri che $\operatorname{Hom}_C(V, W)$ è uno spazio vettoriale su C con le consuete operazioni tra funzioni: $(\phi + \psi)(v) = \phi(v) + \psi(v)$ e $(c\phi)(v) = c\phi(v)$ per ogni $v \in V$.

(b) Siano fissate una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V ed una base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ di W. Fissati due indici, i_0 e j_0, si definisca l'applicazione lineare $\psi_{i_0,j_0} : V \to W$, ponendo, per $i = 1, \dots, n$,

$$\psi_{i_0,j_0}(v_i) = \begin{cases} w_{j_0} & \text{se } i = i_0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

Si mostri che ogni applicazione lineare si scrive in modo unico come combinazione lineare delle $\psi_{i,j}$, per $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$.

Esercizio 13. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo C. Siano U ed E due sottospazi di V di dimensioni k ed $n - k$ rispettivamente, tali che $V = U \oplus E$. Fissato comunque $\psi \in \operatorname{Hom}_C(U, E)$ si consideri il sottoinsieme di V

$$U_\psi = \{\, u + \psi(u) \mid u \in U \,\}.$$

(a) Si mostri che U_ψ è un sottospazio di V di dimensione k e che $V = U_\psi \oplus E$.

(b) Si mostri che la corrispondenza $\psi \mapsto U_\psi$ induce una biiezione tra $\operatorname{Hom}_C(U, E)$ e l'insieme S_E dei sottospazi X di V tali che $V = X \oplus E$.

Esercizio 14. Sia V uno spazio vettoriale sul campo C. Quali sono le proiezioni e le simmetrie associate alla decomposizione $V = \langle 0 \rangle \oplus V$?

Esercizio 15. Nello spazio vettoriale $\mathbb{Q}^4$ siano dati i vettori

$$w_1 = e_1 - e_3 + 2e_4, \quad w_2 = e_1 + e_2 - 2e_4, \quad w_3 = 3e_4 - e_1 - 2e_2 - e_3, \quad w_4 = 2e_1 + e_2 - e_3,$$

ove $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$ indica la base canonica.

(a) Si scriva, in tutti i modi possibili, il vettore $e_1 + e_2 - e_4$ come combinazione lineare di $w_1, \dots, w_4$.

(b) Indicata con $\phi\colon \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$ l'applicazione lineare che manda la base canonica ordinatamente su $w_1, \dots, w_4$, si determinino una base del nucleo e dell'immagine di ϕ e di $\ker\phi \cap \operatorname{im}\phi$.

Esercizio 16. Siano V uno spazio vettoriale ed U, W, due suoi sottospazi tali che $V = U \oplus W$.

(a) Indicata con π una qualunque delle due proiezioni associate alla decomposizione di V, si verifichi che $\pi \circ \pi = \pi$, ovvero che, per ogni vettore $x \in V$, si ha $\pi(\pi(x)) = \pi(x)$.

(b) Indicata con σ una qualunque delle due simmetrie associate alla decomposizione di V, si verifichi che $\sigma \circ \sigma = 1$, ovvero che, per ogni vettore $x \in V$, si ha $\sigma(\sigma(x)) = x$.

(c) Si determinino nucleo ed immagine di π_U, π_W, σ_U e σ_W. Inoltre, per ciascuna delle applicazioni, si determini l'insieme dei vettori uniti.

Esercizio 17. Sia $\phi\colon V \to V$ un'applicazione lineare tale che $\phi \circ \phi = \phi$. Si mostri che ϕ è la proiezione su $\operatorname{im}\phi$, parallelamente a $\ker\phi$.

Esercizio 18. Sia V uno spazio vettoriale sul campo C, di caratteristica diversa da 2, e sia $\psi\colon V \to V$ un'applicazione lineare tale che $\psi \circ \psi = \mathrm{id}_V \neq \psi$. Si mostri che ψ è una simmetria. Qual è l'asse e quale la direzione di simmetria?

Esercizio 19. Sia C un campo di caratteristica 2 ($1 + 1 = 0$ in C).

(a) Sia $V = U \oplus W$ uno spazio vettoriale su C. Si dimostri che le simmetrie associate alla decomposizione di V coincidono con l'identità $\mathrm{id} : V \to V$, qualunque sia la decomposizione dello spazio.

(b) Si consideri l'endomorfismo $\phi : C^2 \to C^2$, definito da $\phi(e_1) = e_1$ e $\phi(e_2) = e_1 + e_2$. Si verifichi che $\phi(\phi(v)) = v$ per ogni $v \in C^2$ (... ma non è una *simmetria* di C^2).

Esercizio 20. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 2 e sia $\cdot : V \times V \to V$ un prodotto, compatibile con la moltiplicazione per scalari, che renda V un campo. Detto u_0 l'elemento neutro per questo prodotto, si mostri che esiste un elemento $v_0 \in V$ tale che $v_0^2 = -u_0$. Si concluda che $V \cong \mathbb{C}$.