Esercizio 1. Risolvere i sistemi lineari $Ax = b$ di matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & -5 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -5 & 2 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & -3 & -1 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right).$$

Esercizio 2. Determinare le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} -tx_1 + (t-1)x_2 + x_3 = 1 \\ (t-1)x_2 + tx_3 = 1 \\ 2x_1 + x_3 = 5 \end{cases}$$

al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Dato l'insieme $S = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda + 2 \\ 2\mu + 1 \\ 3\mu - 1 \\ \lambda - \mu - 1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$ determinare un sistema lineare le cui soluzioni coincidano con S. Quante saranno le incognite? Qual è il numero minimo di equazioni necessarie? Se leggiamo S come un piano in $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$, il sistema cercato a cosa corrisponde?

Esercizio 4. Si considerino, al variare di λ tra i numeri reali, i sistemi lineari:

$$\Sigma_\lambda = \begin{cases} (\lambda - 1)x + 2y - \lambda z = 0 \\ 2x - z = 0 \\ -(\lambda + 1)x - \lambda y + (\lambda + 2)z = 0 \end{cases}.$$

(a) Si indichi con S_λ l'insieme delle soluzioni del sistema Σ_λ. Si determini al variare di λ la dimensione del sottospazio S_λ.

(b) Si dica se l'unione dei sottoinsiemi S_λ, al variare di λ, genera tutto $\mathbb{R}^3$. In caso contrario, si determini la dimensione del sottospazio generato da tale unione.

Esercizio 5. Si considerino i sistemi lineari omogenei:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_4 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \lambda x_1 + 2x_2 - 3\lambda x_3 = 0 \\ (\lambda + 1)x_1 + 2x_2 - 3\lambda x_3 + x_4 = 0 \\ 2\lambda x_2 - 3x_3 + 2\lambda x_4 = 0 \end{cases}$$

Si determinino i valori di λ per cui i due sistemi ammettono soluzioni non banali in comune.

Esercizio 6. Si considerino, al variare di λ tra i numeri reali, i sistemi lineari:

$$\Sigma_\lambda = \begin{cases} (\lambda - 1)x_1 + 2x_2 - \lambda x_3 + 2\lambda x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ -(\lambda + 1)x_1 - \lambda x_2 + (\lambda + 2)x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + (\lambda - 2)x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

(a). Si indichi con S_λ l'insieme delle soluzioni del sistema Σ_λ. Si determini al variare di λ la dimensione del sottospazio S_λ.
(b). Si dica se l'unione dei sottoinsiemi S_λ, al variare di λ, genera tutto $\mathbb{R}^4$. In caso contrario, si determinino le equazioni del sottospazio generato da tale unione.

Esercizio 7. Al variare di λ in $\mathbb{Q}$, si dica quante soluzioni vi sono in $\mathbb{Q}^4$ per il seguente sistema di equazioni lineari

$$\Sigma_\lambda\colon \begin{cases} (\lambda-1)x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0 \\ \lambda x_2 + (\lambda+1)x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_3 + x_4 = 0 \\ (\lambda-1)x_1 + x_4 = 0 \end{cases} .$$

Esercizio 8. Si determinino i valori del parametro t per cui il sistema

$$\Sigma_t\colon \begin{cases} (t+1)x_1 + 2x_2 - tx_4 = 1 \\ (2-t)x_2 + x_3 = 1 \\ (2-t)x_2 + 2tx_4 = 1 \\ (t+1)x_1 + 2x_2 + (2-t)x_3 = 1 \end{cases}$$

ha soluzione.

Per i valori di t per cui il sistema ammette un'unica soluzione, si determini tale soluzione in funzione del parametro t.

Esercizio 9. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino le terne di piani

$$\pi_1(\lambda)\colon y - \lambda x + (\lambda-2)(z+1) = 0, \quad \pi_2(\lambda)\colon (\lambda-1)x + \lambda z = 2, \quad \pi_3(\lambda)\colon x + \lambda y + 2\lambda^2 z = 0,$$

al variare di λ in $\mathbb{R}$.
Si dica per quali valori di λ le intersezioni $\pi_1(\lambda)\cap\pi_2(\lambda)$, $\pi_1(\lambda)\cap\pi_3(\lambda)$, $\pi_2(\lambda)\cap\pi_3(\lambda)$ sono tre rette parallele, a due a due, distinte.

Esercizio 10. Si considerino i sistemi lineari omogenei:

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + x_4 &= 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} \lambda x_1 + 3x_2 - (\lambda+1)x_3 &= 0 \\ 2\lambda x_2 + x_3 - \lambda x_4 &= 0 \end{cases} .$$

Si determinino i valori di $\lambda \in \mathbb{C}$ per cui i due sistemi ammettono soluzioni non banali in comune.

Esercizio 11. Due matrici $A, B \in M_{n\times m}(C)$ si dicono *riga-equivalenti* se esiste una matrice invertibile $P \in \mathrm{GL}_n(C)$ tale che $B = PA$. Analogamente, due sistemi di equazioni lineari si dicono *riga-equivalenti* se lo sono le loro matrici complete.

(a) Si verifichi che due sistemi lineari riga-equivalenti hanno lo stesso insieme di soluzioni.

(b) È vero o falso che due matrici $A, B \in M_{n\times m}(C)$ sono riga-equivalenti se, e solo se, i sistemi omogenei $AX = 0$ e $BX = 0$ hanno lo stesso insieme di soluzioni?

(c) È vero o falso che due sistemi non-omogenei di equazioni lineari, $AX = c$ e $BX = d$, sono riga-equivalenti se, e solo se, hanno lo stesso insieme di soluzioni?

Esercizio 12. Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$. Si mostri che l'insieme delle matrici $X \in M_2(\mathbb{Q})$ tali che $AX = XA$ è un sottospazio di $M_2(\mathbb{Q})$, la cui dimensione è uguale a 2 oppure a 4, e quest'ultimo caso accade se, e solo se, A è una matrice scalare ($a = d$ e $b = c = 0$).

Esercizio 13. Siano dati tre spazi vettoriali V, W, Z, di dimensione finita sul campo C, e due applicazioni lineari $\phi\colon V \to W$, $\psi\colon W \to Z$. Si mostri che

(a) $\mathrm{rk}(\psi\circ\phi) = \mathrm{rk}\phi$ se, e solo se, $\ker\psi \cap \mathrm{im}\,\phi = \langle 0\rangle$;

(b) $\mathrm{rk}(\psi\circ\phi) = \mathrm{rk}\psi$ se, e solo se, $\ker\psi + \mathrm{im}\,\phi = W$.

(c) Si concluda che, dato un endomorfismo $f\colon V \to V$, si ha $\mathrm{rk}(f\circ f) = \mathrm{rk}f$ se, e solo se, $V = \ker f \oplus \mathrm{im}\, f$.

Esercizio 14. Sia B una matrice $m \times n$. Si descriva l'effetto che si ottiene su B, moltiplicando B *a destra* per una matrice elementare di ordine n.

Esercizio 15. Si verifichi che le matrici elementari sono tutte invertibili e che ogni matrice invertibile, ad elementi in un corpo C, è prodotto di un numero finito di matrici elementari.

Esercizio 16. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C e sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Si mostri che $\mathrm{rk}\phi = \dim V$ se, e solo se, esiste un'applicazione lineare $\phi^{-1} : V \to V$, tale che $\phi\circ\phi^{-1} = id_V = \phi^{-1}\circ\phi$.

Esercizio 17. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C e sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Si mostri che sono equivalenti le seguenti affermazioni:

(a) $\mathrm{rk}\phi < \dim V$.

(b) esiste un'endomorfismo $\psi : V \to V$, diverso da 0, tale che $\phi \circ \psi = 0$.

(c) esiste un'endomorfismo $\chi : V \to V$, diverso da 0, tale che $\chi \circ \phi = 0$.

(d) per ogni $\psi : V \to V$, si ha $\phi \circ \psi \neq id_V$.

(e) per ogni $\chi : V \to V$, si ha $\chi \circ \phi \neq id_V$.

Esercizio 18. Cosa resta vero del contenuto degli ultimi due esercizi se V ha dimensione infinita?

* **Esercizio 19.** Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita su C e sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare. Si chiamano rispettivamente *conucleo* e *coimmagine* di ϕ i quozienti $\mathrm{coker}\,\phi = W/\mathrm{im}\,\phi$ e $\mathrm{coim}\,\phi = V/\ker\phi$.

(a) Si dimostri che $\dim \mathrm{coker}\,\phi + \dim \mathrm{coim}\,\phi = \dim W$.

(b) È vero che $\dim V - \dim \ker\phi = \dim W - \dim \mathrm{coker}\,\phi$?

(c) Sia $j : \ker\phi \to V$ l'immersione naturale del sottospazio in V. Si mostri che, per ogni applicazione lineare $\psi : T \to V$ tale che $\phi \circ \psi = 0$ esiste un'unica applicazione lineare $\nu : T \to \ker\phi$ tale che $\psi = j \circ \nu$.

(d) Utilizzare il punto precedente per determinare il nucleo dell'applicazione lineare $h(T, \phi) : \mathrm{Hom}_C(T, V) \to \mathrm{Hom}_C(T, W)$, definita da $\xi \mapsto \phi \circ \xi$.

(e) Sia $p : W \to \mathrm{coker}\,\phi$ la proiezione naturale di W sul quoziente. Si mostri che, per ogni applicazione lineare $\psi : W \to T$ tale che $\psi \circ \phi = 0$ esiste un'unica applicazione lineare $\nu : \mathrm{coker}\,\phi \to T$ tale che $\psi = \nu \circ p$.

(f) Utilizzare il punto precedente per determinare il nucleo dell'applicazione lineare $h(\phi, T) : \mathrm{Hom}_C(W, T) \to \mathrm{Hom}_C(V, T)$, definita da $\xi \mapsto \xi \circ \phi$.

Esercizio 20. Sia $B \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$ una matrice di rango k.

(a) Si mostri che, se ${}^tBB = \mathbf{1}_k$, allora $B{}^tB$ è la matrice della proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^n$, dotato dell'usuale prodotto scalare, sul sottospazio generato dalle colonne della matrice B.

(b) In generale, si mostri che $P = B({}^tBB)^{-1}{}^tB$ è la matrice della proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^n$, dotato dell'usuale prodotto scalare, sul sottospazio generato dalle colonne della matrice B.

(c) Si mostri infine che, preso comunque un vettore $b \in \mathbb{R}^k$, il sistema lineare ${}^tBx = b$ ha soluzione e che le soluzioni sono tutti e soli gli elementi $p \in \mathbb{R}^n$ della forma $p = B({}^tBB)^{-1}b + (\mathbf{1}_n - P)y$, al variare di y in $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 21. Unendo il cloro (Cl_2) all'idrossido di potassio (KOH), si ottengono cloruro di potassio (KCl), clorato di potassio ($KClO_3$) e acqua (H_2O). Bilanciare la reazione

$$Cl_2 + KOH \to KCl + KClO_3 + H_2O;$$

ovvero trovare dei numeri naturali $n_1, \dots, n_5$ tali che il numero di atomi di ciascun elemento nel termine di sinistra $n_1Cl_2 + n_2KOH$ sia uguale al numero di atomi di ciascun elemento presente nel termine di destra $n_3KCl + n_4KClO_3 + n_5H_2O$.