Esercizio 1. Calcolare il determinante della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

con uno sviluppo di Laplace, operazioni elementari sulle righe e/o colonne oppure con la regola di Sarrus.

Esercizio 2. Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Sia A la matrice A_3 dell'esercizio 2. Calcolare la sua matrice dei complementi algebrici A^c e calcolare l'inversa di A usando A^c.

Esercizio 4. Risolvere, se possibile, i seguenti sistemi lineari con la regola di Cramer

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ -2x_1 + x_2 = 2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 & = 0 \\ 2x_1 + x_3 & = 1 \\ x_1 - x_3 & = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 & = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 & = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 & = 1 \end{cases}$$

Esercizio 5. Siano A, B matrici quadrate di ordine n e sia B invertibile. Esistono formule per $|A + B|, |A + A|, |A^2|, |AB^{-1}|$ che dipendono solo dai determinanti di A e B?

Esercizio 6. Sia n un intero maggiore o uguale a 2 e si considerino le matrici $S_n \in M_n(C)$, definite da

$$S_n = a\sum_{j=1}^{n} \varepsilon(n-j+1, j) + b\sum_{j=1}^{[n/2]} \varepsilon([n/2]-j+1, j) + c\sum_{j=1}^{[n/2]} \varepsilon(n-j+1, [(n+1)/2]+j),$$

ove gli scalari a, b, c appartengono a C, $\{\, \varepsilon(i,j) \mid 1 \le i,j \le n \,\}$, è la base canonica di $M_n(C)$ e $[x]$ indica la parte intera del numero reale x, ovvero, $[x] \in \mathbb{Z}$ e $[x] \le x < [x]+1$.

(a) Si scrivano le matrici e si calcoli il determinante di S_3, S_4.

(b) Si scrivano le matrici e si calcoli il determinante di S_5 e S_6.

(c) Si scriva e si dimostri una formula generale per $\det S_n$, al variare di n.

(d) $^{(*)}$ Si calcoli S_n^2. Sia X un'indeterminata e si calcoli il polinomio $\det(X\mathbf{1}_n - S_n^2)$.

Esercizio 7. Per $n \ge 2$, denotiamo con X_n la matrice di $M_n(\mathbb{Q})$,

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} \left(i\varepsilon(i,i) + (-1)^{i-1} i\varepsilon(n-i+1, i) \right),$$

ove si sono indicate con $\varepsilon(h,k)$ le matrici della base canonica di $M_n(\mathbb{Q})$.

(a) Si scrivano le matrici X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 e se ne calcolino i determinanti.

(b) Si scrivano e si dimostrino delle formule generali per il rango e per il determinante di X_n, in funzione dell'intero n.

Esercizio 8. Dato uno spazio vettoriale reale V e k suoi vettori $u_1, \dots, u_k$, si chiama *parallelepipedo generato dai vettori* $u_1, \dots, u_k$ il sottoinsieme

$$PL(u_1, \dots, u_k) = \{\, a_1u_1 + \cdots + a_ku_k \mid a_i \in [0,1],\ i = 1, \dots, k \,\}.$$

Il parallelepipedo si dirà *degenere* se i vettori $u_1, \dots, u_k$ sono linearmente dipendenti. Sia $I_k = \{1, \dots, k\}$ e siano fissati un sottoinsieme $J \subseteq I_k$ ed una funzione $s : J \to \{0,1\}$. La *faccia* del parallelepipedo determinata dalla coppia (J, s) è l'insieme

$$F_{J,s}(u_1, \dots, u_k) = \{\, a_1u_1 + \cdots + a_ku_k \in PL(u_1, \dots, u_k) \mid a_j = s(j)\ \forall j \in J \,\}.$$

(a) Si verifichi che $u_1, \dots, u_k$ ed $u'_1, \dots, u'_k$ determinano lo stesso parallelepipedo non degenere se, e solo se, esiste una permutazione $\sigma \in \Sigma_k$ tale che $u'_j = u_\sigma(j)$ per $j = 1, \dots, k$.

(b) Sia $PL(u_1, \dots, u_k)$ un parallelepipedo non degenere. Fissato un sottoinsieme $J \subseteq I_k$, quante sono le facce del parallelepipedo che hanno lo stesso insieme J? Quante sono le facce del parallelepipedo $F_{J',s'}(u_1, \dots, u_k)$ con $|J'| = |J|$? Quante sono complessivamente le facce del parallelepipedo $PL(u_1, \dots, u_k)$?

Esercizio 9. Dato uno spazio vettoriale reale V ed una sua base (ordinata) $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$, chiamiamo *volume (orientato)* del parallelepipedo generato dai vettori $u_1, \dots, u_n$, relativamente alla base $\mathcal{V}$, lo scalare

$$Vol(\mathcal{V}, u_1, \dots, u_n) = \frac{D(u_1, \dots, u_n)}{D(v_1, \dots, v_n)},$$

ove $0 \neq D \in A^n(V)$.

(a) Si verifichi che se $u'_1, \dots, u'_n$ sono vettori che determinano lo stesso parallelepipedo, allora $Vol(\mathcal{V}, u'_1, \dots, u'_n) = \pm Vol(\mathcal{V}, u_1, \dots, u_n)$.

(b) Si verifichi che, se $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$ è una base di V, allora, per ogni n-upla (ordinata) di vettori, $u_1, \dots, u_n$, si ha $Vol(\mathcal{W}, u_1, \dots, u_n) = \det \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\mathrm{id}) Vol(\mathcal{V}, u_1, \dots, u_n)$.

(c) Sia $\phi : V \to V$ un'applicazione lineare. Presi comunque i vettori $u_1, \dots, u_n$ di V, si verifichi che si ha $Vol(\mathcal{V}, \phi(u_1), \dots, \phi(u_n)) = \det \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) Vol(\mathcal{V}, u_1, \dots, u_n)$.

Esercizio 10. Sia V uno spazio vettoriale su C e siano $\phi_1, \dots, \phi_r$ in $\mathrm{Hom}_C(V, C)$. Si verifichi che l'applicazione $\Phi\colon (v_1, \dots, v_r) \mapsto \phi_1(v_1) \cdots \phi_r(v_r)$ è r-lineare. In particolare, si calcoli esplicitamente tale applicazione come funzione delle coordinate dei vettori coinvolti, nel caso in cui $V = \mathbb{R}^3$ e $\phi_1(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = 2x_1 - x_2$, $\phi_2(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = 3x_1 + 2x_2 - x_3$, $\phi_3(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_2 + x_3$.

Esercizio 11. Sia V uno spazio vettoriale su C e siano ϕ, ψ in $\mathrm{Hom}_C(V, C)$. Si verifichi che l'applicazione $\Phi\colon (v, w) \mapsto \phi(v)\psi(w) - \psi(v)\phi(w)$ è bilineare e alternante. In particolare, si calcoli esplicitamente tale applicazione come funzione delle coordinate dei vettori coinvolti, nel caso in cui $V = \mathbb{R}^3$ e $\phi(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3) = 2x_1 - x_2$, $\psi(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = 3x_1 + 2x_2 - x_3$.

Esercizio 12. Sia $D\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un'applicazione trilineare alternante.

(a) Dati i vettori $v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, $w = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$, $z = z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3$, si scriva esplicitamente $D(v, w, z)$ come funzione delle coordinate dei vettori e del valore $D(e_1, e_2, e_3)$.

(b) Nelle notazioni precedenti, si consideri l'applicazione $(v, w) \mapsto D(e_1, v, w)$. Indicata con $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, la proiezione su $\langle e_2, e_3\rangle$ parallela al vettore e_1, ossia $\pi(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_2e_2 + x_3e_3$, si mostri che $D(e_1, v, w) = D(e_1, \pi(v), \pi(w))$. Si mostri infine che la restrizione di tale applicazione ad ogni sottospazio complementare di $\langle e_1\rangle$ è diversa dall'applicazione nulla.

(c) Nelle notazioni precedenti, si mostri che due vettori v, w di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente dipendenti se, e solo se, $D(e_1, v, w) = D(e_2, v, w) = D(e_3, v, w) = 0$.

Esercizio 13. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione n, ϕ un endomorfismo di V e D un'applicazione n-lineare alternante non-nulla su V.

(a) Si mostri che l'applicazione D'_ϕ, definita ponendo

$$D'_\phi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^{n} D(x_1, \dots, \phi(x_j), \dots, x_n),$$

per ogni n-upla di vettori di V, è n-lineare e alternante.

(b) Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V, si mostri che il quoziente $\dfrac{D'_\phi(v_1, \dots, v_n)}{D(v_1, \dots, v_n)}$ non dipende né dalla scelta della base, né dalla scelta di D.

(c) Fissata una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V, si calcoli il quoziente $\dfrac{D'_\phi(v_1, \dots, v_n)}{D(v_1, \dots, v_n)}$ a partire dalla matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$.

Esercizio 14. Siano $r \leq n$ due numeri interi positivi e si consideri l'insieme $\mathscr{I}_{r,n}$ delle applicazioni strettamente crescenti di $\{1, \dots, r\}$ in $\{1, \dots, n\}$.

(a) Dato un sottoinsieme $U \subset \{1, \dots, n\}$ con $\#(U) = r$, si mostri che esiste un'unica applicazione $I \in \mathscr{I}_{r,n}$ la cui immagine è uguale ad U.

(b) Si mostri che $\#(\mathscr{I}_{r,n}) = \binom{n}{r}$.

Esercizio 15. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul corpo C. Per ogni intero r, con $2 \leq r \leq n$, si indichi con $A^r(V)$ l'insieme delle applicazioni r-lineari alternanti su V.

(a) Si verifichi che $A^r(V)$ è uno spazio vettoriale su C.

(b) Siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V ed $F \in A^r(V)$. Si mostri che, dati i vettori $y_1, \dots, y_r$, con $y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$, per $j = 1, \dots, r$, si ha

$$F(y_1, \dots, y_r) = \sum_{I \in \mathscr{I}_{r,n}} \left[\sum_{\sigma \in \Sigma_r} (\mathrm{sgn}\sigma)\, a_{I(\sigma(1)),1} \cdots a_{I(\sigma(r)),r} \right] F(v_{I(1)}, \dots, v_{I(r)}).$$

Esercizio 16. Si deduca dai due esercizi precedenti che, se $\dim_C V = n$, allora $\dim_C A^r(V) = \binom{n}{r}$, per $2 \leq r \leq n$[1]. In particolare si mostri che, data una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V, si construisce una base di $A^r(V)$, prendendo le funzioni D_I, al variare di $I \in \mathscr{I}_{r,n}$, definite nel modo seguente: fissato I, si pone $D_I(v_{J(1)}, \dots, v_{J(r)}) = \delta_{IJ}$, al variare di $J \in \mathscr{I}_{r,n}$.

Si mostri infine che si ha

$$F = \sum_{I \in \mathscr{I}_{r,n}} F(v_{I(1)}, \dots, v_{I(r)})\, D_I$$

per ogni $F \in A^r(V)$,

Esercizio 17. Siano V e W due C-spazi vettoriali, rispettivamente di dimensione n ed m, e sia dato un omomorfismo $\phi\colon V \to W$.

(a) Dato un intero r, con $1 \leq r \leq \min\{n, m\}$, si verifichi che, per ogni $G \in A^r(W)$, (cf. 15), l'applicazione $G^\phi\colon (x_1, \dots, x_r) \mapsto G(\phi(x_1), \dots, \phi(x_r))$ appartiene ad $A^r(V)$.

(b) Si verifichi inoltre che l'applicazione $A^r(\phi)\colon A^r(W) \to A^r(V)$, definita da $G \mapsto G^\phi$, è un'applicazione lineare (detta l'*omomorfismo di ordine r associato* a ϕ).

(c) Siano V uno spazio vettoriale di dimensione n e $\phi\colon V \to V$ un'applicazione lineare. Si mostri che, fissata comunque una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V, la matrice di $A^n(\phi)$ rispetto alla base $A^n(\mathcal{V})$ è $(\det\phi)$.

Esercizio 18. Siano fissate $n+1$ coppie di numeri reali (x_i, y_i), $i = 0, \dots, n$. Si mostri che esiste un unico polinomio $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$, di grado minore o uguale ad n, tale che $P(x_i) = y_i$ se, e solo se, gli $x_0, \dots, x_n$ sono a due a due distinti.

Esercizio 19. Notazioni come sopra.

(a) Si verifichi che il simplesso $\Delta(A_0, \dots, A_n) = A_0 + \Delta(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ dipende solo dai punti $A_0, A_1, \dots, A_n$ e non dall'ordine in cui vengono presi.

(b) Si mostri che, per $n \geq 2$, $A_0 + PL(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ è diverso da $A_1 + PL(\overrightarrow{A_1A_0}, \overrightarrow{A_1A_2} \dots, \overrightarrow{A_1A_n})$.

(c) Si mostri che il simplesso $\Delta(A_0, \dots, A_n)$ è l'intersezione di tutti i parallelepipedi determinati dai punti $A_0, \dots, A_n$.

(d) Partendo dagli esempi di dimensione piccola, si definiscano le facce k-dimensionali di un simplesso (risp. di un parallelepipedo) n-dimensionale per $k = 0, 1, \dots, n$. Si contino le facce k dimensionali di un simplesso (risp. parallelepipedo) di dimensione n.

[1] Si osservi che, per $r > n$, si ha necessariamente $A^r(V) = \{0\}$. Si definiscono infine $A^0(V) = C$ ed $A^1(V) = \mathrm{Hom}_C(V, C)$ e quindi la formula sulla dimensione è vera per $0 \leq r \leq n$.