Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale sul campo C e siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V e $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ la corrispondente base duale di V^*. Si mostri che per ogni vettore $v \in V$, si ha $v = \sum_{i=1}^n (v_i^* \circ v)v_i$ [risp. per ogni vettore $\xi \in V^*$, si ha $\xi = \sum_{i=1}^n (\xi \circ v_i)v_i^*$].

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C e siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$ due basi di V. Indicate con $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ e $\mathcal{W}^* = \{w_1^*, \dots, w_n^*\}$ le rispettive basi duali, siano $P = (p_{ij})_{1\le i,j\le n} = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(1_V)$ e $Q = (q_{ij})_{1\le i,j\le n} = \alpha_{\mathcal{W}^*,\mathcal{V}^*}(1_{V^*})$, le matrici dei cambiamenti di base. Si mostri che $Q = {}^tP$.

Esercizio 3. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di $\mathbb{R}[X]$, di grado ≤ 3 e si consideri la sua base $\{1, X, X^2, X^3\}$. Si mostri che l'applicazione $\phi\colon V \to \mathbb{R}$, definita da $P \mapsto P(2)$, è un elemento di V^* e la si scriva come combinazione dei vettori della base duale della base data.

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su C e sia $S \neq \varnothing$ un sottoinsieme di $V^* = \mathrm{Hom}_C(V, C)$.

(a) È vero che gli elementi di S generano V^* se, e solo se, $\bigcap_{\zeta\in S} \ker\zeta = \langle 0\rangle$?

(b) È vero che gli elementi di S sono linearmente indipendenti se, e solo se, per ogni elemento $\zeta_0 \in S$, esiste un vettore, $v_0 \in V$, che appartiene a $\bigcap_{\zeta_0\neq\zeta\in S} \ker\zeta$, ma non appartiene a $\ker\zeta_0$?

Esercizio 5. Sia $V = \mathbb{Q}[X]$ lo spazio vettoriale di tutti i polinomi a coefficienti razionali e si considerino la base $\{1, X, X^2, \dots\}$ di V ed il corrispondente sottoinsieme $\mathcal{E} = \{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots\}$ di $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, \mathbb{Q})$, definito dalle condizioni $e_i(X^j) = \delta_{i,j}$ per ogni coppia (i, j) di interi non-negativi. Si mostri che l'applicazione $\phi\colon V \to \mathbb{Q}$, definita da $P \mapsto P(1)$, è un elemento di V^*, ma che non è possibile scriverla come combinazione lineare finita degli elementi di $\mathcal{E}$.

Esercizio 6. Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione 4 e sia V^* il suo duale. Indichiamo con $\{v_1, \dots, v_4\}$ una base di V e con $\{v_1^*, \dots, v_4^*\}$ la base duale di V^*. Si considerino i sottospazi di V^*

$$Z = \langle 2v_1^* - 3v_2^* - v_4^*, 3v_2^* - 2v_3^* + v_4^*, v_1^* + v_4^*\rangle \quad \text{e}$$
$$Z_\lambda = \langle \lambda v_1^* + 2v_2^* - 3\lambda v_3^*, (\lambda+1)v_1^* + 2v_2^* - 3v_3^* + v_4^*, 2\lambda v_2^* - 3v_3^* + 2\lambda v_4^*\rangle\,,\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

(a) Si calcolino, al variare di λ le dimensioni dei sottospazi $Z^\perp$, $Z_\lambda^\perp$ e $Z^\perp + Z_\lambda^\perp$.

(b) Si dica per quali valori di λ si ha $Z^\perp + Z_\lambda^\perp = Z^\perp \oplus Z_\lambda^\perp$.

Esercizio 7. Sia data una base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dello spazio vettoriale reale V e si denoti, come di consueto, con $\{v_1^*, v_2^*, v_3^*, v_4^*\}$ la base duale di V^*. Si consideri al variare di λ tra i numeri reali, il sottospazio S_λ di V^* generato dai vettori

$$(\lambda-1)v_1^* + 2v_2^* - \lambda v_3^* + 2\lambda v_4^*, \qquad 2v_1^* - v_3^* + v_4^*,$$
$$-(\lambda+1)v_1^* - \lambda v_2^* + (\lambda+2)v_3^* - 2v_4^*, \qquad 2v_1^* + (\lambda-2)v_2^* - 2v_3^*.$$

(a) Si determini al variare di λ la dimensione del sottospazio $S_\lambda^\perp$ di V.

(b) Si determini l'intersezione di tutti i sottospazi S_λ di V^*.

Esercizio 8. Si consideri lo spazio, $V = \mathbb{R}[X]_{\le 3}$ dei polinomi, a coefficienti reali, di grado minore o uguale a 3, con la base (canonica) $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$.

(a) È vero che $\mathcal{V} = \{1, X-1, (X-2)^2, (X-3)^3\}$ è una base di V? In caso affermativo si scrivano le matrici di cambiamento di base $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{B}}(1)$ e $\alpha_{\mathcal{B},\mathcal{V}}(1)$.

(b) Sia $\mathcal{B}^* = \{\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3\} \subset V^*$, ove $\delta_k(P(X)) = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$ per ogni $P(X)$ in V e $k = 0, \dots, 3$. Si verifichi che $\mathcal{B}^*$ è la base duale di $\mathcal{B}$ in V^*. Scrivere gli elementi della base $\mathcal{V}^*$, duale di $\mathcal{V}$, come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}^*$.

Esercizio 9. Si consideri lo spazio, $V = K[X]_{\le n}$ dei polinomi, a coefficienti nel campo K, di grado minore o uguale a n e sia V^* lo spazio vettoriale duale. Si verifichi che le forme lineari $\xi_0, \dots, \xi_n$ sono una base di V^* nei casi seguenti:

(a) Esistono $x_0, \dots, x_n$ in K, a due a due distinti, tali che $\xi_j(P) = P(x_j)$ per ogni $P \in V$ e per ogni $j = 0, \dots, n$.

(b) Esiste $x_0 \in K$ tale che $\xi_j(P) = P^{(j)}(x_0)$ per ogni $j = 0, \dots, n$.

In ciascuno dei due casi si scriva la corrispondente base duale di V.

Esercizio 10. Si consideri lo spazio, $V = K[X]_{\leq n}$ dei polinomi di grado minore o uguale a n, a coefficienti nel campo K, di caratteristica 0, e sia V^* lo spazio vettoriale duale. Si verifichi che le forme lineari $\xi_0, \dots, \xi_n$, definite da $\xi_j(P) = P'(j)$ per ogni $P \in V$, sono linearmente dipendenti.

Esercizio 11. Siano V e W spazi vettoriali su C, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ basi di tali spazi, $\phi\colon V \to W$ e $\phi^*\colon W^* \to V^*$ due applicazioni lineari, l'una trasposta dell'altra. Si verifichi che, se $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$, allora ${}^tA = \alpha_{\mathcal{W}^*,\mathcal{V}^*}(\phi^*)$, ove $\mathcal{V}^*$ e $\mathcal{W}^*$ sono le basi duali delle basi date.

Esercizio 12. Sia V uno spazio vettoriale sul campo C e sia V^* lo spazio vettoriale duale. Dati $v^*, w^* \in V^*$, si consideri l'applicazione (detta *prodotto tensoriale* delle forme lineari v^* e w^*)

$$\begin{aligned} v^* \otimes w^*\colon \qquad & V \times V \to C \\ & (x, y) \mapsto (v^* \circ x)(w^* \circ y). \end{aligned}$$

(a) Si mostri che $v^* \otimes w^*$ è un'applicazione bilineare e si verifichi che, per ogni coppia di vettori $v^*, w^* \in V^*$ e per ogni costante $c \in C$, si ha $(cv^*) \otimes w^* = c(v^* \otimes w^*) = v^* \otimes (cw^*)$.
(b) Si mostri che, presi comunque $u^*, v^*, w^* \in V^*$, si ha $(u^* + v^*) \otimes w^* = u^* \otimes w^* + v^* \otimes w^*$ e $u^* \otimes (v^* + w^*) = u^* \otimes v^* + u^* \otimes w^*$.
(c) Fissata una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ dello spazio V e la rispettiva base duale $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ di V^*, si mostri che l'insieme $\left\{ v_i^* \otimes v_j^* \mid 1 \leq i, j \leq n \right\}$ è una base dello spazio vettoriale $\mathrm{Bil}(V, V, C)$ delle applicazioni bilineari su V.
(d) Estendere la definizione ad r forme lineari.

Esercizio 13. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione 4, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una base di V e $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_4^*\}$ la relativa base duale. Date le forme lineari $v^* = 2v_1^* - v_3^* + v_4^*$ e $w^* = v_1^* - 3v_2^* - v_3^*$ si calcoli l'applicazione bilineare $v^* \otimes w^*$ su una generica coppia di vettori di V.

Esercizio 14. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $\phi : V \to V^*$ un isomorfismo. Si definisca che $g : V \times V \to C$ ponendo $g(v, w) = v \circ \phi(w)$, per ogni $(v, w) \in V \times V$

(a) Si verifichi che g è un'applicazione bilineare, non degenere e che per ogni $(v, w) \in V \times V$ si ha $g(w, v) = v \circ \phi^*(w)$, ove ϕ^* è l'applicazione trasposta di ϕ.

(b) si verifichi che g è simmetrica oppure alternante se, e solo se, per ogni coppia di vettori $v, w \in V$ si ha $g(v, w) = 0 \Leftrightarrow g(w, v) = 0$.

Esercizio 15. Si consideri lo spazio vettoriale $M_n(C)$ delle matrici quadrate di ordine n, ad elementi nel campo C. Si mostri che, fissata comunque una forma lineare $\alpha : M_n(C) \to C$, esiste una matrice $A \in M_n(C)$ tale che $\alpha(X) = \mathrm{tr}(AX)$ per ogni $X \in M_n(C)$. Si deduca da ciò il fatto che, per ogni spazio vettoriale di dimensione finita V, lo spazio vettoriale $\mathrm{Hom}_C(V, V)$ è canonicamente isomorfo al suo duale.

Esercizio 16. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C. Dati comunque due vettori v^* e w^* appartenenti allo spazio duale V^*, si consideri l'applicazione

$$\begin{aligned} v^* \wedge w^* \colon & V \times V \to C \\ & (x, y) \mapsto (v^* \circ x)(w^* \circ y) - (w^* \circ x)(v^* \circ y) \end{aligned} \tag{1}$$

(a) Si mostri che $v^* \wedge w^*$ è un'applicazione bilineare alternante e si verifichi che per ogni coppia di vettori $v^*, w^* \in V^*$ e per ogni costante $c \in C$, si ha $(cv^*) \wedge w^* = c(v^* \wedge w^*) = v^* \wedge (cw^*)$ e $v^* \wedge w^* = -w^* \wedge v^*$.[1]

[1] L'applicazione bilineare alternante $v^* \wedge w^*$ è detta il *prodotto esterno* delle forme lineari v^* e w^*. Si potrebbe mostrare che, data una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ dello spazio V e la rispettiva base duale $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ di V^*, l'insieme $\left\{ v_i^* \wedge v_j^* \mid 1 \leq i < j \leq n \right\}$ è una base dello spazio $A^2(V)$ delle applicazioni bilineari alternanti su V. La definizione di prodotto esterno può essere estesa a più forme lineari, ovvero, dati $w_1^*, \dots, w_r^* \in V^*$, si definisce l'applicazione r-lineare alternante

$$\begin{aligned} w_1^* \wedge \cdots \wedge w_r^* \colon & \underbrace{V \times \cdots \times V}_{r \text{ copie}} \to C \\ & (x_1, \dots, x_r) \mapsto \sum_{\sigma \in \Sigma_r} (\mathrm{sgn}\sigma)(w_1^* \circ x_{\sigma(1)}) \cdots (w_r^* \circ x_{\sigma(r)}) \end{aligned} \tag{2}$$

dove Σ_r indica l'insieme delle permutazioni su r oggetti. Anche in questo caso, con le notazioni fissate sopra, l'insieme $\left\{ v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_r}^* \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n \right\}$ è una base dello spazio $A^r(V)$

(b) Si mostri che le applicazioni $v_1^* \wedge w_1^* \neq 0 \neq v_2^* \wedge w_2^*$ sono proporzionali se, e solo se, $\langle v_1^*, w_1^* \rangle = \langle v_2^*, w_2^* \rangle$ in V^*.

(c) Nel caso in cui $\dim V = 4$, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ è una base di V e $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_4^*\}$ è la relativa base duale, si calcoli su una generica coppia di vettori di V l'applicazione bilineare $v^* \wedge w^*$, ove $v^* = 2v_1^* - v_3^* + v_4^*$ e $w^* = v_1^* - 3v_2^* - v_3^*$.

Esercizio 17. Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita sul campo C e siano fissate le basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ di W e la base duale $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ di V^*. Fissati $v^* \in V^*$ e $w \in W$ si consideri l'applicazione $w \otimes v^* : V \to W$ definita da $x \mapsto w(v^* \circ x)$ per ogni $x \in V$.

(a) Si verifichi che $w \otimes v^* \in \mathrm{Hom}_C(V, W)$ e si determinino nucleo ed immagine. Si verifichi inoltre che nello spazio vettoriale $\mathrm{Hom}_C(V, W)$ si ha

- $(w_1 + w_2) \otimes v^* = w_1 \otimes v^* + w_2 \otimes v^*$ per ogni $w_1, w_2 \in W$ e $v^* \in V^*$;
- $w \otimes (v_1^* + v_2^*) = w \otimes v_1^* + w \otimes v_2^*$ per ogni $w \in W$ e $v_1^*, v_2^* \in V^*$;
- $(aw) \otimes v^* = a(w \otimes v^*) = w \otimes (av^*)$ per ogni $w \in W$, $v^* \in V^*$ e $a \in C$.

È vero che l'applicazione $y^* \mapsto (y^* \circ w)v^*$ di $W^* \to V^*$ è la trasposta di $w \otimes v^*$?

(b) Siano $n = 5$ ed $m = 4$ e si considerino i vettori $v^* = 3v_1^* - v_3^* + 5v_5^*$ e $w = w_1 - 2w_2 + 3w_4$. Si determinino nucleo ed imagine di $w \otimes v^*$ e la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(w \otimes v^*)$.

(c) In generale, dati $v^* = a_1 v_1^* + \cdots + a_n v_n^*$ e $w = b_1 w_1 + \cdots + b_m w_m$, che relazioni ci sono tra le colonne di coordinate $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ e la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(w \otimes v^*)$.

(d) Si indichi con $W \otimes_C V^*$ il sottospazio di $\mathrm{Hom}_C(V, W)$ generato su C dalle applicazioni del tipo $w \otimes v^*$, al variare di $v^* \in V^*$ e di $w \in W$. Si determini la dimensione di tale sottospazio esibendone una base e si concluda che $W \otimes_C V^* = \mathrm{Hom}_C(V, W)$. [**sugg.** Si considerino gli elementi del tipo $w_i \otimes v_j^*$, ove $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ e $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ sono le basi descritte sopra.]

(e) Siano $v^* \in V^*$ e $w \in W$. Che relazioni ci sono tra l'omomorfismo $w \otimes v^* \in \mathrm{Hom}_C(V, W)$ definito sopra e l'applicazione bilineare $w \otimes v^* : W^* \times V \to C$ definita nell'Esercizio 10?

Esercizio 18. Siano U, V e W tre spazi vettoriali di dimensione finita sul campo C e, seguendo l'esercizio precedente, identifichiamo $V \otimes_C U^*$ con $\mathrm{Hom}_C(U, V)$ e $W \otimes_C V^*$ con $\mathrm{Hom}_C(V, W)$. Identificando $W \otimes_C U^*$ con $\mathrm{Hom}_C(U, W)$, come si descrive la composizione di applicazioni lineari? In particolare, dati $v \otimes u^*$ e $w \otimes v^*$, con $u^* \in U^*$, $v \in V$, $v^* \in V^*$, $w \in W$; che dire dell'applicazione composta $(w \otimes v^*) \circ (v \otimes u^*)$?

Esercizio 19. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C. Si consideri l'applicazione $\tau : \mathrm{Hom}_C(V, V) \cong V \otimes_C V^* \to C$ definita da $v \otimes w^* \mapsto w^* \circ v$.

(a) Si verifichi che si tratta di un'applicazione lineare. Si fissi una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V e si scrivano le relazioni esistenti tra $\tau(\phi)$ e la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$.

(b) È vero che, fissata comunque un'applicazione lineare, $\xi : \mathrm{Hom}_C(V, V) \to C$, esiste un (unico) omomorfismo $\psi_0 : V \to V$ tale che $\xi(\phi) = \tau(\psi_0 \circ \phi)$ per ogni $\phi \in \mathrm{Hom}_C(V, V)$?

(c) È vero che, fissata comunque un'applicazione lineare, $\xi : \mathrm{Hom}_C(V, V) \to C$, esiste un (unico) omomorfismo $\psi_1 : V \to V$ tale che $\xi(\phi) = \tau(\phi \circ \psi_1)$ per ogni $\phi \in \mathrm{Hom}_C(V, V)$? È $\phi_0 = \phi_1$?

Esercizio 20. Siano U, V e W spazi vettoriali di dimensione finita sul campo C.

(a) Si mostri che c'è un isomorfismo canonico $V^* \otimes_C U^* \cong (U \otimes_C V)^*$.

(b) Dall'isomorfismo canonico $W \otimes_C (V^* \otimes_C U^*) \cong (W \otimes_C V^*) \otimes_C U^*$ si deduca l'isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_C(U \otimes_C V, W) \cong \mathrm{Hom}_C(U, \mathrm{Hom}_C(V, W))$$

e lo si scriva esplicitamente in termini di applicazioni lineari.

Si ponga $A^0(V) = C$ ed $A^1(V) = V^*$, allora il prodotto così definito per gli elementi della base $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ di V^* si può estendere per linearità ad un prodotto, compatibile con la moltiplicazione per costanti, su tutto l'insieme

$$A(V) = \bigoplus_{r=0}^{\dim V} A^r(V)$$

che rende $A(V)$ una C-algebra associativa e non-commutativa, detta l'*algebra esterna* su V^* ed usualmente indicata col simbolo $\Lambda(V^*)$. Per dualità si può definire in modo analogo l'algebra $\Lambda(V)$.