Esercizio 1. Calcolare polinomio caratteristico, autovalori (e loro molteplicità e nullità), autospazi delle seguenti matrici e dire se siano o meno diagonalizzabili. Se sono diagonalizzabili trovare una matrice H tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
$$A_5 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Una matrice reale 2×2 ha sempre almeno un autovettore?

Esercizio 3. Una matrice reale 3×3 ha sempre almeno un autovettore?

Esercizio 4. Una matrice invertibile è sempre diagonalizzabile? Viceversa, una matrice diagonalizzabile è sempre invertibile?

Esercizio 5. Se A è diagonalizzabile, la sua trasposta lo è?

Esercizio 6. Si dimostrino le seguenti affermazioni.

(a) La relazione di simiglianza è una relazione di equivalenza sull'insieme $M_n(C)$.

(b) Se $A = a\mathbf{1}_n$ è una matrice scalare, allora la classe di equivalenza di A rispetto alla relazione di simiglianza contiene la sola matrice A.

Esercizio 7. Si consideri l'endomorfismo $\phi\colon \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$, avente matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico di ϕ, gli autovalori e le rispettive molteplicità e nullità.

Esercizio 8. Si dica se è diagonalizzabile l'endomorfismo ϕ di $\mathbb{C}^4$ che ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ -10 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica. In caso affermativo, si determini una base di $\mathbb{C}^4$ costituita da autovettori relativi a ϕ.

Esercizio 9. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C e $\phi\colon V \to V$ un endomorfismo. Si mostri che se il polinomio caratteristico di ϕ è prodotto di fattori lineari distinti in $C[X]$, allora ϕ è diagonalizzabile.

Esercizio 10. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C e $\phi\colon V \to V$ un endomorfismo. Se $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$, con $\phi(W_j) \subseteq W_j$ per $j = 1, \dots, r$, indichiamo con $\phi_j\colon W_j \to W_j$ la restrizione di ϕ al sottospazio W_j. Si dimostri che $p_\phi(X) = p_{\phi_1}(X) \cdots p_{\phi_r}(X)$.

Esercizio 11. Sia $P \in M_2(\mathbb{R})$ una matrice con tutte le entrate positive.

(a) Si mostri che P ha due autovalori reali distinti.

(b) Sia λ_1 l'autovalore maggiore di P e si indichi con $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ un autovettore (non-nullo) ad esso relativo. Si mostri che $x_1 x_2 > 0$.

(c) Sia λ_2 l'autovalore minore di P e si indichi con $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ un autovettore (non-nullo) ad esso relativo. Si mostri che $y_1 y_2 < 0$.

Esercizio 12. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $\phi : V \to V$ un endomorfismo diagonalizzabile. Dato uno spazio vettoriale T di dimensione n, si consideri l'endomorfismo $\Phi : \mathrm{Hom}(T, V) \to \mathrm{Hom}(T, V)$ definito da $\Phi(\xi) = \phi \circ \xi$.

(a) Si dica se Φ è diagonalizzabile e se ne discutano lo spettro, le molteplicità e le nullità in funzione dello spettro di ϕ.

(b) Si considerino le analoghe domande a proposito dell'endomorfismo $\Psi : \mathrm{Hom}(V,T) \to \mathrm{Hom}(V,T)$ definito da $\Psi(\xi) = \xi \circ \phi$.

Esercizio 13. Sia V uno spazio vettoriale sul corpo C e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una sua base. Si consideri l'endomorfismo $\phi\colon V \to V$ definito dalle condizioni

$$\begin{cases} \phi(v_i) = v_{i+1} & \text{se } 1 \le i < n \\ \phi(v_n) = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \end{cases}.$$

Si determinino, la matrice di ϕ ed il suo polinomio caratteristico. È vero o falso che il polinomio minimo ed il polinomio caratteristico di ϕ coincidono?

Esercizio 14. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul corpo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Siano poi Φ un automorfismo di V, N un endomorfismo di V e λ una costante di modulo minore di 1, legati dalla relazione: $\Phi N = \lambda N \Phi$. Si mostri che, sotto tali ipotesi, N è un endomorfismo nilpotente.

Esercizio 15. Data una matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, si indichi con $\mathscr{C}_A$ il sottospazio vettoriale

$$\mathscr{C}_A = \{\, X \in M_n(\mathbb{C}) \mid XA = AX \,\}.$$

(a) Si mostri che $\dim \mathscr{C}_A = \dim \mathscr{C}_B$ quando A e B sono simili.

(b) Si mostri che $\mathscr{C}_A = \left\langle \mathbf{1}, A, \dots, A^{n-1} \right\rangle$ quando il polinomio caratteristico di A è prodotto di n fattori lineari distinti.

Esercizio 16. Sia $\Delta \in M_n(\mathbb{C})$, una matrice diagonale. Si mostri che ogni matrice diagonale si scrive come combinazione lineare di $\mathbf{1}, \Delta, \dots, \Delta^{n-1}$ se, e solo se, gli autovalori di Δ sono a due a due distinti. [**Sugg.** Può essere utile ricordare il determinante di Van der Monde.]

Esercizio 17. Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matrice che soddisfa alla condizione $A^2 = A$. Si mostri che $\mathrm{tr} A = \mathrm{rk} A$.

Esercizio 18. Sia $n \ge 3$ e si consideri la matrice $A_n = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, di ordine n, ove

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha & \text{se } |j-i| = 1 \\ \beta & \text{se } j - i = 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ed $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Posto $\delta_n = \det A_n$, si scriva la relazione ricorsiva che governa la successione $(\delta_n)_{n \ge 3}$ e si calcolino i valori iniziali necessari per determinare la successione. Si dica se, per $\alpha = 2$ e $\beta = 4$, la successione $(\delta_n)_{n \ge 3}$ converge in $\mathbb{C}$.

Esercizio 19. Al variare di n tra gli interi positivi, si indichi con B_n la matrice quadrata di ordine n del tipo

$$B_n = \begin{pmatrix} 2a & a & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a & 2a & a & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & a & 2a & a & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & a & 2a & a & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & a & 2a & a \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a & 2a \end{pmatrix},$$

ove a è una costante reale. Si scriva in modo esplicito $\delta_n(a) := \det B_n$ quale funzione della variabile a e si dia una condizione necessaria e sufficiente su a affinché esista finito $\lim\limits_{n \to \infty} \delta_n(a)$.

Esercizio 20. Sia $P \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice diagonalizzabile. Si mostri che $\mathbf{1} + P^2$ è invertibile.

Esercizio 21. Si determini l'insieme delle matrici reali di ordine 3 che siano simultaneamente antisimmetriche e nilpotenti.