Esercizio 1. Si mostri che un endomorfismo ϕ di uno spazio vettoriale V, di dimensione n, è nilpotente se, e solo se, 0 è l'unico autovalore di ϕ.

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo $\phi\colon \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, avente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J di ϕ ed una matrice invertibile $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Q})$ tale che $J = P^{-1}AP$.

Esercizio 3. Si determini il polinomio caratteristico, il polinomio minimo e la forma di Jordan degli endomorfismi di $\mathbb{Q}^n$ aventi le seguenti matrici rispetto alla base canonica. Per ciascuno degli endomorfismi si determini una matrice invertibile, P, tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice di Jordan.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 3 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ -3 & 6 & -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 9 & -5 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\mathbb{C}$, $\phi\colon V \to V$ un endomorfismo il cui polinomio caratteristico sia $p_\phi(X) = (X - a_1)^{m_1} \cdots (X - a_r)^{m_r}$ con $a_1, \dots, a_r$ a due a due distinti. Posto $W_j = \ker(\phi - a_j)^{m_j}$, per $j = 1, \dots, r$, si indichino con $\delta_j\colon W_j \to W_j$ la moltiplicazione per lo scalare a_j e con $\nu_j\colon W_j \to W_j$ la restrizione di $\phi - a_j$ a W_j, per $j = 1, \dots, r$.

(a) Si verifichi che ν_j è un endomorfismo nilpotente e che δ_j commuta con ν_j.

(b) Si considerino gli endomorfismi $\nu\colon V \to V$ e $\delta\colon V \to V$, definiti dalle condizioni $\nu_{|W_j} = \nu_j$ e $\delta_{|W_j} = \delta_j$, per $j = 1, \dots, r$. Si mostri che $\phi = \delta + \nu$ e che $\delta \circ \nu = \nu \circ \delta$ (ovvero: ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{C}$ è somma di un endomorfismo diagonalizzabile e di un endomorfismo nilpotente che commutano tra loro)

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 10 sul corpo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali. Si determinino il polinomio caratteristico, il polinomio minimo e la matrice di Jordan di tutti gli endomorfismi ϕ di V soddisfacenti alle condizioni:

$$\begin{gathered} \dim\ker(\phi - 5) = 2 < \dim\ker(\phi - 5)^2 < \dim\ker(\phi - 5)^3 = 4, \\ \dim\ker(\phi + 2) = 2 < \dim\ker(\phi + 2)^4 = 4, \qquad \dim\operatorname{im}\phi = 8. \end{gathered}$$

Esercizio 6. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 sul corpo $\mathbb{Q}$ e si consideri un endomorfismo $\phi\colon V \to V$, di polinomio minimo $(X-2)^2(X+3)$. Si determinino Il polinomio caratteristico, il polinomo minimo e la matrice di Jordan dell'endomorfismo $L_\phi\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V,V) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V,V)$, definito ponendo $L_\phi(\psi) := \phi \circ \psi$.

Esercizio 7. Siano V uno spazio vettoriale sul corpo C, $\psi\colon V \to V$ un endomorfismo nilpotente e q è il minimo intero positivo tale che $\psi^q(v) = 0$ per ogni $v \in V$. Si mostri che esiste una famiglia di sottospazi, $H_1, \dots, H_q$, di V, soddisfacenti alle condizioni seguenti.

(a) $\ker\psi = H_1$ e $\ker\psi^j = H_j \oplus \ker\psi^{j-1}$ per $j = 2, \dots, q$;

(b) $\psi(H_j) \subseteq H_{j-1}$ e la restrizione di ψ ad H_j è iniettiva, per $j = 2, \dots, q$;

(c) $V = H_1 \oplus \cdots \oplus H_q$.

Esercizio 8. Siano V uno spazio vettoriale sul corpo C, $\psi\colon V \to V$ un endomorfismo nilpotente ed $H_1, \dots, H_q$ una famiglia di sottospazi di V soddisfacenti alle condizioni dell'esercizio precedente, ove q è il minimo intero tale che $\psi^q(v) = 0$ per ogni $v \in V$.

(a) Fissata una base di $v_1, \dots, v_s$ di H_q, si verifichi che i vettori

$$v_1, \psi(v_1), \dots, \psi^{q-1}(v_1), v_2, \psi(v_2), \dots, \psi^{q-1}(v_s)$$

sono linearmente indipendenti.

(b) Sia j il minimo intero positivo tale che $\psi^j(v_1), \dots, \psi^j(v_s)$ non siano una base di H_{q-j} e si prendano dei vettori $w_1, \dots, w_t$ che completino i vettori dati ad una base di H_{q-j}. Si mostri che i vettori

$$w_1, \psi(w_1), \dots, \psi^{q-j-1}(w_1), w_2, \psi(w_2), \dots, \psi^{q-j-1}(w_t),$$
$$v_1, \psi(v_1), \dots, \psi^{q-1}(v_1), v_2, \psi(v_2), \dots, \psi^{q-1}(v_s)$$

sono linearmente indipendenti.

(c) Si prosegua analogamente a quanto fatto nel punto (b) per tutti gli indici minori di j, e si dimostri che con questa tecnica si determina una base di $V = H_1 \oplus \cdots \oplus H_q$ rispetto a cui ψ ha matrice di Jordan.

Esercizio 9. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una sua base. Sia dato inoltre, l'endomorfismo $\psi\colon V \to V$, avente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -3 & -2 & 2 \\ -5 & 9 & -7 & -5 & 4 \\ 3 & -5 & 4 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base $\mathcal{V}$.

(a) Si mostri che ψ è nilpotente e si determini il minimo intero positivo q tale che $\psi^q = 0$ (il *periodo* di ψ).

(b) Si determini una decomposizione $V = H_1 \oplus \cdots \oplus H_q$ del tipo descritto nell'esercizio 7.

Esercizio 10. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C e $\phi\colon V \to V$ un endomorfismo. Inoltre siano dati dei sottospazi $W_1, \dots, W_r$, di dimensione positiva, tali che ϕ induca un endomorfismo su ciascuno di tali spazi e $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$.

Si dimostri, che il polinomio minimo di ϕ è il minimo comune multiplo dei polinomi minimi delle restrizioni $\phi_{|W_i}$ per $i = 1, \dots, r$.

Esercizio 11. Sia A una matrice quadrata, di ordine n, ad elementi nel corpo C.

(a) Sia $C = \mathbb{R}$. Si mostri che una matrice simmetrica A è nilpotente se, e solo se, $\operatorname{tr}(A^2) = 0$.

(b) Sia $C = \mathbb{C}$. Si dia l'esempio di una matrice simmetrica B, non nilpotente, e tale che $\operatorname{tr}(B^2) = 0$.

(c) Sia $C = \mathbb{C}$. Si mostri che A è nilpotente se, e solo se, $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^2) = \cdots = \operatorname{tr}(A^n) = 0$.

Esercizio 12. Sia A una matrice reale antisimmetrica (${}^tA = -A$).

(a) Si mostri che gli autovalori di A sono immaginari puri.

(b) Si mostri che $\mathbf{1} + A$ è una matrice invertibile.

(c) Si mostri che $P = (\mathbf{1} - A)(\mathbf{1} + A)^{-1}$ è una matrice ortogonale.

Esercizio 13. Sia A una matrice quadrata ad elementi in $\mathbb{C}$.

(a) Si determini una condizione necessaria e sufficiente affinché si abbia $\operatorname{tr} A^k = (\operatorname{tr} A)^k$ per ogni intero positivo k.

(b) È possibile caratterizzare l'insieme delle matrici $A \in M_n(\mathbb{C})$ soddisfacenti alla condizione del punto (a) tramite equazioni lineari omogenee sulle entrate della matrice? E tramite equazioni algebriche?

Esercizio 14. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione N sul corpo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e sia $\phi\colon V \to V$ un endomorfismo avente tutti gli autovalori reali e soddisfacente alla condizione $\phi^k = \mathbf{1}_V$ per qualche intero positivo k. Si mostri che ϕ è diagonalizzabile e $\phi^2 = \mathbf{1}_V$.

Esercizio 15. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 15 sul corpo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e sia $\phi\colon V \to V$ un endomorfismo tale che

$$\operatorname{rk}(\phi) = 10, \quad \operatorname{rk}(\phi^2) = 7, \quad \operatorname{rk}(\phi^3) = 4, \quad \operatorname{rk}(\phi^4) = 2, \quad \operatorname{rk}(\phi^5) = 0.$$

Si scriva una matrice di Jordan di ϕ.

Esercizio 16. Si consideri una matrice di Jordan di ordine n, con $(J - \alpha\mathbf{1})^n = \mathbf{0} \neq (J - \alpha\mathbf{1})^{n-1}$, ovvero

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \alpha & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Si mostri che J è simile alla sua trasposta e si determini una matrice invertibile P tale che $P^{-1}JP = {}^tJ$. Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$. È vero o falso che A è simile a ${}^tA$?