Esercizio 1. Si considerino in $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$ i seguenti punti e vettori

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si verifichi che le sottovarietà lineari $P + \langle u_1, u_2 \rangle$ e $Q + \langle w_1, w_2 \rangle$ coincidono.

Esercizio 2. Si verifichi che il sottoinsieme dei punti ${}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)$ di $\mathbb{A}^4\mathbb{R}$, che soddisfano alle condizioni

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

è una sottovarietà lineare e si determinino il sottospazio direttore e la dimensione.

Esercizio 3. Siano $\mathbb{L} = P + U$ ed $\mathbb{M} = Q + W$ due sottovarietà lineari di $\mathbb{A}(\mathbb{R}^n)$. Si mostri che $\mathbb{L} = \mathbb{M}$ se, e solo se, $U = W$ e $Q - P \in U$.

Esercizio 4. Si considerino due sottovarietà lineari (non vuote) $\mathbb{L} = P + W$ ed $\mathbb{M} = Q + U$. Si verifichi che $\mathbb{L}$ ed $\mathbb{M}$ sono incidenti se, e solo se, il vettore $Q - P$ si scrive come somma di un vettore di U e di un vettore di W.

Esercizio 5. Dato il piano $\pi = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si determini il piano ad esso parallelo e passante per il punto $(0, -1, 3)^t$. Si determini la retta r intersezione di π con il piano $\pi' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$. e si trovi il piano del fascio di asse r passante per il punto $(1, 0, 0)^t$.

Esercizio 6. Date le tre rette

$$r = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}, \quad s = \begin{cases} x_1 - x_3 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}, \quad t = \begin{cases} x_2 = 2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

dimostrare che sono a 2 a 2 sghembe. Trovare (se esiste) una retta q per $(-1, -1, 0)^t$ incidente r ed s e verificare se essa incide anche t. Determinare, se esistono, tutte le rette incidenti sia r che s, che t. È possibile determinare una retta t' tale che t', r, s, q siano a 2 a 2 sghembe?

Esercizio 7. In $\mathbb{A}^4\mathbb{R}$ si considerino i piani

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Si verifichi che i due piani non sono né incidenti, né paralleli, né sghembi.

Esercizio 8. Siano V e W due spazi vettoriali su $\mathbb{Q}$ e si considerino le basi $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di V e $\mathcal{W} = \{w_1, w_2\}$ di W. Siano date inoltre, le applicazioni lineari $\phi\colon V \to W$ e $\psi_{(a,b)}\colon V \to W$, definite dalle condizioni

$$\phi(v_1 + v_2) = w_1, \quad \phi(v_3) = w_1 + w_2, \quad \phi(v_1 + v_3) = 3w_2;$$
$$\psi_{(a,b)}(v_2) = 2w_1 - 2w_2, \quad \psi_{(a,b)}(2v_1) = -2w_1 + 4w_2, \quad \psi_{(a,b)}(3v_1 + 3v_2 + 3v_3) = aw_1 + bw_2.$$

(a) Si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$.

(b) Si mostri che $\mathbb{L} = \left\{ \psi_{(a,b)} \;\middle|\; (a, b) \in \mathbb{Q}^2 \right\}$ è una sottovarietà lineare di $\mathbb{A}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, W))$ e se ne calcoli la dimensione, e si dica se $\phi \in \mathbb{L}$.

Esercizio 9. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

e si determini l'insieme $\mathscr{D} = \{ B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid AB = A \}$. Posto $V = M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, si mostri che $\mathscr{D}$ è una sottovarietà lineare di $\mathbb{A}(V)$ e se ne determini la dimensione.

Esercizio 10. Siano date $A, B \in M_4(\mathbb{R})$ e si consideri l'insieme $\mathbb{L} = \{\, X \in M_4(\mathbb{R}) \mid AX = B \,\}$. Si mostri che $\mathbb{L}$ è una sottovarietà lineare dello spazio affine $\mathbb{A}(M_4(\mathbb{R}))$ e se ne calcoli la dimensione in funzione del rango della matrice A.

Si scrivano esplicitamente gli elementi di $\mathbb{L}$ nel caso in cui

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 11. Si dimostri che la composizione di due applicazioni affini $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ e $g\colon \mathbb{A}' \to \mathbb{A}''$ è ancora un'applicazione affine. Si dimostri che l'applicazione identica $1\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ è un'affinità.

Esercizio 12. Sia $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ un'applicazione affine e $\phi\colon V \to V'$ l'applicazione lineare associata. Sono equivalenti

(a) f è un'affinità;

(b) ϕ è un isomorfismo di spazi vettoriali;

(c) f è un'applicazione biiettiva.

Esercizio 13. Si consideri lo spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$, con $\dim_C V = 4$, e sia fissato su di esso un riferimento $\mathscr{R} = \{O, v_1, \ldots . v_4\}$.

(a) Si scriva la matrice nel riferimento dato dell'omotetia di centro il punto $P_0 = O + 2v_1 - 3v_4$ e coefficente di dilatazione $\frac{1}{3}$.

(b) Si consideri l'affinità di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si dimostri che si tratta di un'omotetia e si determinino il centro ed il coefficiente di dilatazione.

Esercizio 14. Determinare la matrice, rispetto ai sistemi di riferimento canonici, della trasformazione affine $f\colon \mathbb{A}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ tale che $f({}^t(1,1,0)) = {}^t(3,1)$, $f((0,1,1)) = {}^t(1,1)$, $f({}^t(0,0,1)) = {}^t(1,0)$, $f({}^t(0,1,0)) = {}^t(1,0)$.

Esercizio 15. Determinare la matrice B, rispetto ai sistemi di riferimento canonici, dell'affinità f di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ tale che $f({}^t(1,0)) = {}^t(2,1)$, $f({}^t(0,1)) = {}^t(0,1)$, $f({}^t(0,0)) = {}^t(1,3)$. Vi sono altri punti uniti oltre ${}^t(0,1)$?

Esercizio 16. Determinare la matrice B, rispetto ai sistemi di riferimento canonici, dell'affinità f di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ tale che $f({}^t(1,1)) = {}^t(1,2)$, $f({}^t(1,-1)) = {}^t(-1,2)$, $f({}^t(0,1)) = {}^t(1,1)$. Vi sono punti uniti? Scrivere le matrici di cambio di sistemi di riferimento tra $\mathcal{S} = \{{}^t(1,1), {}^t(1,-1), {}^t(0,1)\}$ e $\mathcal{S}' = \{{}^t(1,2), {}^t(-1,2), {}^t(1,1)\}$. Determinare inoltre $\alpha_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}(f)$.

Esercizio 17. Determinare la matrice B, rispetto ai sistemi di riferimento canonici, dell'affinità di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ tale che $f((1,0,0)^t) = {}^t(3,1,1)$, $f({}^t(1,1,0)) = {}^t(2,1,2)$, $f({}^t(1,0,1)) = {}^t(4,2,1)$, $f({}^t(0,0,1)) = {}^t(2,1,1)$. Vi sono punti uniti?

Esercizio 18. In $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$:

(a) Determinare la matrice rispetto al sistema di riferimento canonico della proiezione sulla retta r di equazione $x - y + 1 = 0$ nella direzione del vettore $v = (2,1)^t$.

(b) Determinare ora la matrice della stessa proiezione rispetto al sistema di riferimento $\mathcal{S} = \{P_0 = (0,1)^t, v_1 = (1,1)^t, v_2 = (2,1)^t\}$.

(c) Determinare la matrice della simmetria di asse la retta r e direzione il vettore v prima nel sistema di riferimento canonico e poi rispetto ad $\mathcal{S}$.

Esercizio 19. In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, dato il piano π di equazione $2x - z + 2 = 0$ determinare la matrice rispetto al sistema di riferimento canonico della proiezione su π nella direzione del vettore $u = {}^t(1,1,0)$. Determinare la matrice della stessa proiezione rispetto al sistema di riferimento $\mathcal{S} = \{P_0 = {}^t(0,1,2), P_1 = {}^t(1,1,4), P_2 = {}^t(0,2,2), P_3 = {}^t(-1,0,2)\}$. Calcolare la matrice della simmetria di asse π e direzione u prima rispetto al s.d.r. canonico e poi rispetto al s.d.r. $\mathcal{S}$.

Esercizio 20. Sia $(\mathbb{A}, V, +)$ uno spazio affine ed $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ un'affinità.

(a) Si mostri che f manda punti allineati in punti allineati e se ne deduca che, dati comunque $k+1$ punti, $P_0, \dots, P_k$, di $\mathbb{A}$ ($k \in \mathbb{N}$), si ha $f(P_0 \vee \cdots \vee P_k) = f(P_0) \vee \cdots \vee f(P_k)$.

(b) Sia $\mathbb{L}$ una sottovarietà lineare ed $f(\mathbb{L}) = \{\, f(P) \mid P \in \mathbb{L} \,\}$. Si mostri che $\dim f(\mathbb{L}) = \dim \mathbb{L}$.

(c Siano $\mathbb{L}$ ed $\mathbb{M}$ due sottovarietà lineari incidenti (risp. parallele, risp. sghembe). Si mostri che $f(\mathbb{L})$ ed $f(\mathbb{M})$ sono incidenti (risp. parallele, risp. sghembe).

Esercizio 21. Sia $(\mathbb{A}, V, +)$ uno spazio affine ed $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ un'affinità. Un punto $P \in \mathbb{A}$ è un *punto unito* per f se $f(P) = P$.

(a) Si mostri che se P e Q sono due punti uniti per f, allora $f(X) = X$ per ogni punto $X \in P \vee Q$.

(b) Sia $\mathbb{L}$ una sottovarietà lineare di dimensione k, contenente $k+1$ punti uniti, in posizione generale. Si mostri che tutti i punti di $\mathbb{L}$ sono uniti.

(c) Si mostri che l'insieme dei punti uniti per f è una sottovarietà lineare. Che dire della sua dimensione?

Esercizio 22. Sia $(\mathbb{A}, V, +)$ uno spazio affine ed $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ un'affinità. Una sottovarietà lineare $\mathbb{L}$ è *unita* per f se $f(\mathbb{L}) \subseteq \mathbb{L}$.

(a) Farsi degli esempi di punti, rette e piani uniti per particolari affinità dello spazio affine tridimensionale. In particolare si mostri che possono esistere rette unite (risp. piani uniti) che non contengono alcun punto unito.

(b) Sia $f : \mathbb{A}^2(C) \to \mathbb{A}^2(C)$ un'affinità ed $r \subseteq \mathbb{A}^2(C)$ una retta unita per f. Si mostri che, se la restrizione ad r di f non è una traslazione, allora la retta r contiene almeno un punto unito per f.

(c)Sia $f : \mathbb{A}^2(C) \to \mathbb{A}^2(C)$ un'affinità ed $r_1, r_2 \subseteq \mathbb{A}^2(C)$ due rette unite per f, non parallele tra loro. È vero che tutte le rette del fascio generato da r_1 ed r_2 sono unite? Che dire se le due rette sono parallele?

Esercizio 23. Siano dati tre punti non allineati P_1, P_2, P_3 nel piano euclideo, e sia $X = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3$, con $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ (coordinate baricentriche).

(a) Si verifichi che $|\alpha_3|$ è uguale al rapporto tra l'area del triangolo P_1P_2X e l'area del triangolo $P_1P_2P_3$. Si verifichino le analoghe identità per α_2 ed α_1.

(b) Si determinino i punti, X, del piano per cui i tre triangoli P_1P_2X, P_1P_3X, P_2P_3X hanno aree uguali.

(c) Vale un analogo risultato nello spazio tridimensionale? Ed in dimensione $n > 3$?

Esercizio 24. Dati $r+1$ punti in posizione generale in uno spazio affine reale, $P_0, \dots, P_r$, sia

$$\Delta(P_0, \dots, P_r) = \{\, \lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_r P_r \mid \lambda_i \in [0,1],\ \lambda_0 + \cdots + \lambda_r = 1 \,\}.$$

Si mostri che, presi due punti $P, Q \in \Delta(P_0, \dots, P_r)$ tutti i punti del segmento di estremi PQ, ossia i punti del tipo $\lambda P + (1-\lambda)Q$ con $\lambda \in [0,1]$, sono contenuti in $\Delta(P_0, \dots, P_r)$.

Esercizio 25. Siano $P_0, \dots, P_r$ punti di uno spazio affine. Si verifichi che data una combinazione baricentrica $X = c_0P_0 + c_1P_1 + \cdots + c_rP_r$, con $c_i \in C, \sum_i c_i = 1$, i coefficienti (pesi) c_i sono univocamente determinati da X se e solo se i punti P_i sono in posizione generale.

Esercizio 26. Siano $(\mathbb{A}, V, +)$ ed $(\mathbb{A}', V', +')$ due spazi affini ed $f \colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ un'applicazione affine. Si verifichi che f rispetta le combinazioni baricentriche, ovvero, dati i punti $P_0, \dots, P_r$, ed $X = c_0P_0 + c_1P_1 + \cdots + c_rP_r$, con $c_0 + c_1 + \cdots + c_r = 1$, si verifichi che $f(X) = c_0 f(P_0) + c_1 f(P_1) + \cdots + c_r f(P_r)$.

Esercizio 27. Siano $(\mathbb{A}, V, +)$ ed $(\mathbb{A}', V', +')$ due spazi affini e $P_0, \dots, P_n$ un riferimento su $\mathbb{A}$. Si mostri che, presi comunque $n+1$ punti, $Q_0, \dots, Q_n$, in $\mathbb{A}'$, esiste un'unica applicazione affine $f \colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ tale che $f(P_i) = Q_i$, per $i = 0, \dots, n$. Se $X = c_0P_0 + \cdots + c_nP_n$, con $c_0 + \cdots + c_n = 1$, si mostri che $f(X) = c_0Q_0 + \cdots + c_nQ_n$.

Esercizio 28. Dati i punti $A_0, \dots, A_n$ dello spazio affine reale (in posizione generale), l'insieme

$$PL(A_0, A_1, \dots, A_n) = \left\{ A_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (A_i - A_0) \mid \lambda_i \in [0,1] \right\}$$

è il parallelepipedo da questi determinato.

In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, si considerino i punti $A_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Si disegni il simplesso $\Delta(A_0, A_1, A_2, A_3)$ e si mostri che questo sottoinsieme dipende solo dai punti A_0, A_1, A_2, A_3 e non dall'ordine in cui vengono presi.

(b) Si disegni il parallelepipedo $PL(A_0, A_1, A_2, A_3)$ e si mostri che questo sottoinsieme è diverso dal parallelepipedo $PL(A_1, A_0, A_2, A_3)$.

(c) Si mostri che il simplesso $\Delta(A_0, A_1, A_2, A_3)$ è l'intersezione di tutti i parallelepipedi determinati dai quattro punti A_0, A_1, A_2, A_3.

(d) Si mostri che il simplesso ed il parallelepipedo sono sottoinsiemi *convessi* di $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$, ovvero che, presi comunque due punti, P e Q, appartenenti al sottoinsieme, il segmento $PQ = \{ \lambda P + (1 - \lambda)Q \mid \lambda \in [0, 1] \}$ è tutto contenuto nel sottoinsieme.

Esercizio 29. Nel piano affine $\mathbb{A}(\mathbb{R}^2)$ si consideri il triangolo di vertici $P_0 = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)$, $P_1 = \left(\begin{smallmatrix}2\\-1\end{smallmatrix}\right)$, $P_2 = \left(\begin{smallmatrix}4\\6\end{smallmatrix}\right)$. Si determinino le direzioni di tutte le rette passanti per l'origine ed incidenti il triangolo.

Nello spazio affine $\mathbb{A}(\mathbb{R}^3)$ si consideri il tetraedro di vertici $P_0 = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix}\right)$, $P_1 = \left(\begin{smallmatrix}2\\-1\\1\end{smallmatrix}\right)$, $P_2 = \left(\begin{smallmatrix}4\\6\\1\end{smallmatrix}\right)$, $P_3 = \left(\begin{smallmatrix}4\\6\\3\end{smallmatrix}\right)$. Si determinino le direzioni di tutte le rette passanti per l'origine ed incidenti il tetraedro e si dica per ciascuna di esse quali facce incide.

Si immerga lo spazio $\mathbb{A}(\mathbb{R}^3)$ in $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$ identificando i suoi punti con quelli dell'iperpiano $x_4 = 0$. Si determini una retta di $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$ che incida il tetraedro del punto precedente solo nel suo baricentro.

Esercizio 30. Nello spazio tridimensionale si consideri il tetraedro Δ, di vertici

$$P_0 = \left(\begin{smallmatrix}-1\\-1\\-1\end{smallmatrix}\right), \qquad P_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right), \qquad P_2 = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right), \qquad P_3 = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right).$$

(a) Si calcoli il volume V di Δ.

(b) Si considerino il punto $Q = \left(\begin{smallmatrix}2\\4\\-6\end{smallmatrix}\right)$ ed il piano $\sigma : y = -4$. Dato un punto X dello spazio, non contenuto nel piano per Q, parallelo a σ, si definisce la sua proiezione, X', dal punto Q sul piano σ come il punto di intersezione tra la retta per X e Q ed il piano σ (in simboli $X' = (X + Q) \cap \sigma$). Si determinino le proiezioni $P'_0, \dots, P'_3$ dei vertici di Δ dal punto Q sul piano σ.

(c) Si calcolino le coordinate baricentriche del punto P'_3 rispetto ai punti P'_0, P'_1, P'_2.

(d) Si calcoli l'area A della proiezione di Δ.

Esercizio 31. Nello spazio tridimensionale si consideri il tetraedro Δ, di vertici

$$P_0 = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\-3\end{smallmatrix}\right), \qquad P_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right), \qquad P_2 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\2\end{smallmatrix}\right), \qquad P_3 = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right).$$

(a) Si calcoli il volume V di Δ.

(b) Si consideri la retta r, passante per l'origine e parallela al vettore $v = \left(\begin{smallmatrix}3\\2\\0\end{smallmatrix}\right)$. Si determinino gli estremi del segmento Q_1Q_2, costituito dai punti di r che cadono all'interno di Δ e se ne calcoli la lunghezza.

(c) Considerando la retta r orientata concordemente al vettore v, si dica in quale faccia del tetraedro la retta "entra" e da quale faccia "esce".

Esercizio 32. Notazioni come sopra.

(a) Si verifichi che il simplesso $\Delta(A_0, \dots, A_n)$ dipende solo dai punti $A_0, A_1, \dots, A_n$ e non dall'ordine in cui vengono presi.

(b) Si mostri che, per $n \geq 2$, $PL(A_0, A_1, A_2, \dots, A_n)$ è diverso da $PL(A_1, A_0, A_2, A_n)$.

(c) Si mostri che il simplesso $\Delta(A_0, \dots, A_n)$ è l'intersezione di tutti i parallelepipedi determinati dai punti $A_0, \dots, A_n$.

(d) Partendo dagli esempi di dimensione piccola, si definiscano le facce k-dimensionali di un simplesso (risp. di un parallelepipedo) n-dimensionale per $k = 0, 1, \dots, n$. Si contino le facce k dimensionali di un simplesso (risp. parallelepipedo) di dimensione n.