Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 5 settembre 2013

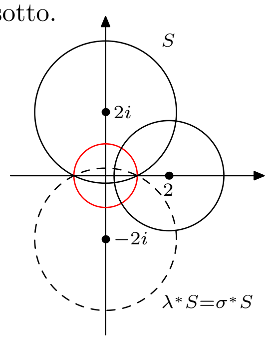
ESERCIZIO 1. *[8 punti]*

(a) *Si disegni nel piano di Gauss l'insieme* $S = \{ z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} - 2i\bar{z} + 2iz - 1 = 0 \}$.

(b) *Siano* $\lambda : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ *la riflessione nella circonferenza unitaria e* $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *il coniugio. Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss gli insiemi* $\lambda^*(S)$ *e* $\sigma^*(S)$.

(c) *Si determinino tutte le circonferenze (o rette) del piano di Gauss,* C*, per cui* $\lambda^*(C) = \sigma^*(C)$.

Svolgimento. (a) S è la circonferenza di centro $2i$ e raggio $\sqrt{5}$, rappresentata qui sotto.



(b) Si ha

$$\lambda^*(S) = \{ z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} + 2i\bar{z} - 2iz - 1 = 0 \}$$
$$\sigma^*(S) = \{ z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} + 2i\bar{z} - 2iz - 1 = 0 \}$$

Quindi i due insiemi coincidono e si tratta della circonferenza di centro $-2i$ e raggio $\sqrt{5}$.

(c) Si consideri una generica circonferenza (o retta) del piano complesso, di equazione $C : az\bar{z} + b\bar{z} + \bar{b}z + c = 0$.

Gli insiemi che si ottengono riflettendo nella circonferenza unitaria e nell'asse reale, hanno equazioni

$$\lambda^*(C) : cz\bar{z} + b\bar{z} + \bar{b}z + a = 0 \quad \text{e} \quad \sigma^*(C) : az\bar{z} + \bar{b}\bar{z} + bz + c = 0.$$

Supponiamo $a, b, c \neq 0$, lasciando al lettore la discussione dei casi particolari (che *è richiesta*). Gli insiemi delle soluzioni coincidono se, e solo se, $\frac{c}{a} = \frac{b}{\bar{b}} = \frac{\bar{b}}{b} = \frac{a}{c}$. Da cui si deduce $a^2 = c^2$ e $b^2 = \bar{b}^2$; o, meglio, $\begin{cases} a = c \\ b = \bar{b} \end{cases}$ e $\begin{cases} a = -c \\ b = -\bar{b} \end{cases}$. Sono quindi due famiglie di circonferenze, la prima del tipo $|z - \alpha| = \sqrt{\alpha^2 - 1}$, ove $\alpha \in \mathbb{R}$ e $|\alpha| \geq 1$, con centri nell'asse reale; e la seconda $|z - i\beta| = \sqrt{\beta^2 + 1}$, ove $\beta \in \mathbb{R}$ con centri nell'asse immaginario. Il lettore è invitato a disegnarsi qualche esempio. □

ESERCIZIO 2. *[12 punti] Siano* U*,* V *e* W *spazi vettoriali su* $\mathbb{Q}$ *su cui siano fissate rispettivamente le basi,* $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_4\}$, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_3\}$, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$.

(a) *Si determinino le applicazioni lineari* $\psi : U \to V$ *e* $\phi : W \to U$ *che soddisfano alle condizioni*

$$\phi(w_1 + w_3) = 0 = \phi(w_2 + w_4), \quad \phi(w_1 + w_4) = -3u_1 + u_2 - u_3, \quad \phi(w_2 - w_3) = u_1 + u_2 + 3u_3 + 2u_4.$$
$$\psi(u_1 - u_2 - u_3) = 0 = \psi(u_1 - u_2 + u_4), \quad \psi(u_1 - u_2) = v_1 - v_3, \quad \psi(u_1 + u_2) = v_1 + 2v_2 + v_3;$$

Si scrivano le matrici $A = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{U}}(\phi)$ *e* $B = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\psi)$*, e si determinino nucleo ed immagine di tali applicazioni.*

(b) *Si consideri l'insieme* $\mathcal{X} = \{ \xi \in Hom_{\mathbb{Q}}(V, W) \mid \phi \circ \xi \circ \psi = 0 \}$*. Si dica se* $\mathcal{X}$ *è un sottospazio o una sottovarietà lineare di* $Hom_{\mathbb{Q}}(V, W)$ *e se ne calcoli in ogni caso la dimensione. Si determinino le matrici delle funzioni appartenenti a* $\mathcal{X}$ *nelle basi date.*

(c) *Sia* $\mathcal{Y} = \{ C \in M_{4\times4}(\mathbb{Q}) \mid C + AXB = \mathbf{1}_4, \ \exists X \in M_{4\times3}(\mathbb{Q}) \}$*. Si determini una rappresentazione parametrica degli elementi di* $\mathcal{Y}$ *e si dica se si tratta di un sottospazio o di una sottovarietà lineare di* $M_4(\mathbb{Q})$*. È vero che ogni matrice in* $M_4(\mathbb{Q})$*, di rango 1, si può trasformare con operazioni elementari sulle righe e sulle colonne in una matrice di* $\mathcal{Y}$*? E cosa si può dire a questo riguardo per una matrice invertibile?*

Svolgimento. (a) Osserviamo che i vettori, $u_1 - u_2 - u_3, u_1 - u_2 + u_4, u_1 + u_2, u_1 - u_2$ sono una base di U e che i vettori $w_1 + w_3, w_2 + w_4, w_1 + w_4, w_2 - w_3$ sono una base di W; quindi le applicazioni lineari ϕ e ψ, soddisfacenti alle condizioni date, esistono e sono uniche. Inoltre è evidente che

$$\ker\psi = \langle u_1 - u_2 - u_3, u_1 - u_2 + u_4 \rangle, \qquad \operatorname{im}\psi = \langle v_1 - v_3, v_1 + 2v_2 + v_3 \rangle,$$
$$\ker\phi = \langle w_1 + w_3, w_2 + w_4 \rangle, \qquad \operatorname{im}\phi = \langle -3u_1 + u_2 - u_3, u_1 + u_2 + 3u_3 + 2u_4 \rangle.$$

Infine

$$B = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{U}}(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Il sottoinsieme $\mathcal{X}$ contiene l'omomorfismo nullo e, presi comunque ξ_1 e ξ_2 in $\mathcal{X}$ e due numeri reali a_1 ed a_2, si ha $\phi \circ (a_1\xi_1 + a_2\xi_2) \circ \psi = a_1\phi \circ \xi_1 \circ \psi + a_2\phi \circ \xi_2 \circ \psi = 0$. Quindi $\mathcal{X}$ è un sottospazio di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$. Un'applicazione lineare $\xi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ appartiene a $\mathcal{X}$ se, e solo se, $\xi(\mathrm{im}\,\psi) \subseteq \ker\phi$. Quindi sul sottospazio $\mathrm{im}\,\psi$ (di dimensione 2), ξ deve assumere valori in $\ker\phi$ (che ha pure dimensione 2), mentre in un qualsiasi complementare di $\mathrm{im}\,\psi$ (di dim 1) può assumere qualunque valore in W (di dimensione 4). Dunque il sottospazio $\mathcal{X}$ ha dimensione 8.
Si può facilmente scrivere una base di $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\mathcal{X})$, prendendo 8 matrici linearmente indipendenti che soddisfano alla condizione data; ad esempio

$$\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\1&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\0&0&1\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}.$$

(c) L'applicazione $f : M_{4\times 3}(\mathbb{R}) \to M_{4\times 4}(\mathbb{R})$, definita da $X \mapsto AXB$, è un'applicazione lineare il cui nucleo è $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\mathcal{X})$. Quindi $\mathcal{Y} = \mathbf{1}_4 + \mathrm{im}\, f$ è una sottovarietà lineare di dimensione 4 di $M_{4\times 4}(\mathbb{R})$, che può essere parametrizzato con l'immagine tramite f di un qualsiasi complementare di $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\mathcal{X})$. Si ha quindi

$$\mathcal{Y} = \left\{ \mathbf{1}_4 - A \begin{pmatrix} a&b&0\\c&d&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix} B \;\middle|\; (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1+a+b-2c-2d & b-2d & a-2c & -a+2c \\ -a-b & 1-b & -a & a \\ -a-b-2c-2d & -b-2d & 1-a-2c & a+2c \\ -a-b-c-d & -b-d & -a-c & 1+a+c \end{pmatrix} \;\middle|\; (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

che dà una rappresentazione parametrica di $\mathcal{Y}$. Il rango di un elemento di $\mathcal{Y}$ è compreso tra 2 e 4, perché il rango della somma di due matrici (o dei corrispondenti omomorfismi) è compreso tra la somma e il valore assoluto della differenza dei ranghi degli addendi. Due matrici di $M_4(\mathbb{R})$ aventi uguale rango possono essere trasformate l'una nell'altra tramite operazioni elementari su righe e colonne (perché?). Quindi l'asserto è vero per le matrici invertibili, ma è falso per le matrici di rango 1, perché nessuna matrice con questo rango appartiene a $\mathcal{Y}$. $\square$

ESERCIZIO 3. *[10 punti] Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 4}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore di 5, ed indichiamo con $\mathcal{B}$ la base canonica di V. Si consideri l'applicazione $\phi : V \to V$, definita da $\phi(P(X)) = P(X+1) - XP'(X)$, ove $P'(X)$ indica il derivato del polinomio $P(X)$ (se $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, allora $P'(X) = \sum_{i=1}^{n} i a_i X^{i-1}$).*

(a) Si verifichi che ϕ è un omomorfismo di spazi vettoriali reali, se ne calcolino nucleo e immagine e si scriva la matrice $A = \alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi)$. Si dica se ϕ è diagonalizzabile.

(b) Detta $\phi^* : V^* \to V^*$ l'applicazione trasposta, se ne determinino nucleo ed immagine. È vero che l'applicazione $P(X) \mapsto P(1)$ appartiene a $\mathrm{im}\,\phi^*$? Qual è la sua controimmagine tramite ϕ^*? Sia $\mathcal{B}^* = \{\, \delta_i \mid 0 \leq i < 5 \,\}$, come di consueto, la base duale della base canonica di V. È vero che l'applicazione $\delta_2 - 3\delta_3$ appartiene a $\mathrm{im}\,\phi^*$? Qual è la sua controimmagine tramite ϕ^*?

Svolgimento. (a) ϕ è un omomorfismo perché lo sono la moltiplicazione per polinomi fissati (che non facciano uscire dallo spazio), così come la derivazione. Inoltre combinazioni lineari di omomorfismi producono ancora omomorfismi. Possiamo calcolare l'effetto dell'applicazione ϕ sui vettori della base canonica e ottenere

$$A = \alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

e $\ker\phi = \langle X-1\rangle$, $\operatorname{im}\phi = \left\langle 1, 2X - X^2, 3X + 3X^2 - 2X^3, 4X + 6X^2 + 4X^3 - 3X^4 \right\rangle$. La matrice di ϕ è triangolare con elementi a due a due distinti sulla diagonale e quindi ϕ è diagonalizzabile.

(b) $\operatorname{im}\phi^* = (\ker\phi)^\perp = \langle \delta_0 + \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \rangle$, $\ker\phi^* = (\operatorname{im}\phi)^\perp = \langle 6\delta_1 + 12\delta_2 + 27\delta_3 + 68\delta_4 \rangle$. L'applicazione $P(X) \mapsto P(1)$ è $\delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 \in \operatorname{im}\phi^*$ e la sua controimmagine è $\delta_0 + \ker\phi^*$.

Infine l'applicazione $\delta_2 - 3\delta_3 \in \operatorname{im}\phi^*$, perché $(\delta_2 - 3\delta_3) \circ (X-1) = 0$ e la sua controimmagine è

$$\phi^{*-1}(\delta_2 - 3\delta_3) = \{ -\delta_2 - 2\delta_4 + a(6\delta_1 + 12\delta_2 + 27\delta_3 + 68\delta_4) \mid a \in \mathbb{R} \}.$$

□