Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 9 luglio 2013

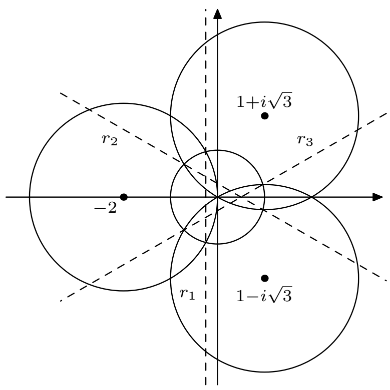
ESERCIZIO 1. [6 punti] *Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss tutti i numeri complessi z tali che $\bar{z}^2 + 2z = 0$.*

(a) *Si determinino le equazioni delle circonferenze passanti per l'origine del piano di Gauss e con centro nei numeri, diversi da 0, che soddisfano la condizione data. Si disegnino tali circonferenze nel piano di Gauss.*

(b) *Si determinino le equazioni delle rette che si ottengono riflettendo le circonferenze del punto precedente nella circonferenza unitaria e si disegnino tali rette nel piano di Gauss.*

Svolgimento. Il numero complesso 0 soddisfa alle condizioni date.

Se $z \neq 0$ soddisfa a tali condizioni, deve aversi $|z| = 2$ e quindi $\bar{z} = \frac{4}{z}$. I numeri complessi $z \neq 0$, soddisfacenti alle condizioni date, sono le radici del polinomio $X^3 + 8$. Quindi, i numeri cercati sono 0 e le radici terze di -8; ovvero -2, $2e^{\pi i/3} = 1 + i\sqrt{3}$, $2e^{5\pi i/3} = 1 - i\sqrt{3}$.



(a) Le circonferenze cercate hanno equazioni

$$C_1 : \bar{z}z + 2z + 2\bar{z} = 0, \qquad C_2 : \bar{z}z - (1 - i\sqrt{3})z - (1 + i\sqrt{3})\bar{z} = 0,$$
$$C_3 : \bar{z}z - (1 + i\sqrt{3})z - (1 - i\sqrt{3})\bar{z} = 0$$

e ciascuna interseca la circonferenza unitaria in una coppia di punti uniti per la riflessione, che determinano quindi la retta che si ottiene per riflessione nella circonferenza unitaria.

(b) Le tre rette hanno quindi equazioni

$$r_1 : 2z + 2\bar{z} + 1 = 0, \quad r_2 : (1 - i\sqrt{3})z + (1 + i\sqrt{3})\bar{z} - 1 = 0, \quad r_3 : (1 + i\sqrt{3})z + (1 - i\sqrt{3})\bar{z} - 1 = 0$$

rispettivamente. □

ESERCIZIO 2. [12 punti] *Dato lo spazio vettoriale V su $\mathbb{Q}$, con la base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, si dica se esiste un endomorfismo $\phi : V \to V$ tale che*

$$\phi^{-1}(\{2v_2 - v_4\}) = (2v_4 - 4v_2) + \langle v_1 - v_3, v_2 + v_4\rangle \qquad \text{e} \qquad v_1 \in \phi^{-1}(\{v_3\}).$$

(a) *In caso affermativo, si determinino $\ker\phi$, $\mathrm{im}\phi$, $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$, autovalori e autovettori per ϕ. In caso negativo, si spieghi perché non può esistere e si dica come modificare $\phi^{-1}(\{2v_2 - v_4\})$ affinché esista. Si determinino per tale ϕ le quantità descritte sopra.*

(b) *Sia $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_4^*\}$ la base duale di V^*. Si mostri che gli endomorfismi $v_j \otimes v_i^* : V \to V$, definiti ponendo $x \mapsto v_j(v_i^* \circ x)$, per ogni $x \in V$, con $1 \leq i, j \leq 4$, sono una base di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, V)$ e si scriva ϕ come combinazione lineare dei vettori di questa base. Si determinino, se esistono, r vettori $w_1, \dots, w_r$ di V ed r forme lineari $\zeta_1, \dots, \zeta_r$ di V^* tali che $\phi = w_1 \otimes \zeta_1 + \cdots + w_r \otimes \zeta_r$, ove $r = \mathrm{rk}\phi$ è il rango di ϕ. Che dire dei sottospazi $\langle w_1, \dots, w_r\rangle$ e $\langle \zeta_1, \dots, \zeta_r\rangle$?*

(c) *Il sottoinsieme $\mathscr{W} = \{\, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, V) \mid (\mathrm{id}_V - \psi) \circ \phi = \phi \,\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, V)$ o una sottovarietà lineare dello spazio affine associato? In ogni caso si determinino dimensione ed un sistema di equazioni cartesiane per $\mathscr{W}$ nel riferimento associato alla base $v_j \otimes v_i^*$, con $1 \leq i, j \leq 4$.*

Svolgimento. (a) Se un tale ϕ esiste, deve aversi,

$$\phi(v_1) = v_3, \quad \phi(v_1 - v_3) = 0, \quad \phi(v_2 + v_4) = 0, \quad \phi(2v_2 - v_4) = -\frac{1}{2}(2v_2 - v_4)).$$

I quattro vettori v_1, $v_1 - v_3$, $v_2 + v_4$, $2v_2 - v_4$ sono una base di V e quindi una tale ϕ esiste ed è unica. In particolare, $\ker\phi = \langle v_1 - v_3, v_2 + v_4\rangle$, $\operatorname{im}\phi = \langle 2v_2 - v_4, v_3\rangle$, $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 1/3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & -1/6 \end{pmatrix}$, gli autovalori sono 0, $-1/2$ e 1, con i rispettivi autospazi $\ker\phi = \langle v_1 - v_3, v_2 + v_4\rangle$, $\ker(\phi + 1/2) = \langle 2v_2 - v_4\rangle$, $\ker(\phi - 1) = \langle v_3\rangle$.

(b) Per verificare che i sedici endomorfismi $v_j \otimes v_i^*$, per $1 \le i, j \le 4$, sono una base di $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, V)$ è sufficiente verificare che sono linearmente indipendenti (o che generano lo spazio). Sia $\sum_{1\le i,j\le 4} a_{ij} v_j \otimes v_i^* = 0$ e si prenda il vettore v_h della base $\mathcal{V}$. Deve aversi

$$0 = \sum_{1\le i,j\le 4} a_{ij} v_j (v_i^* \circ v_h) = \sum_{1\le j\le 4} a_{hj} v_j;$$

da cui si deduce $a_{h1} = \cdots = a_{h4} = 0$, perché i vettori $v_1, \dots, v_4$ sono linearmente indipendenti in V. Si conclude così che gli endomorfismi dati sono linearmente indipendenti in $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, V)$.

La matrice $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ ha rango 2 e si ha

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Possiamo quindi considerare i vettori $w_1 = v_3$, $w_2 = -\frac{1}{3}v_2 + \frac{1}{6}v_4$ e le forme lineari $\zeta_1 = v_1^* + v_3^*$, $\zeta_2 = v_2^* - v_4^*$, ed osservare che $\phi = w_1 \otimes \zeta_1 + w_2 \otimes \zeta_2$, come richiesto. In particolare, $\langle w_1, w_2\rangle = \operatorname{im}\phi$ e $\langle \zeta_1, \zeta_2\rangle = (\ker\phi)^\perp$.

(c) $(\mathrm{id}_V - \psi) \circ \phi = \phi$ se, e solo se, $\psi \circ \phi = 0$ e quindi $\mathscr{W}$ è un sottospazio in quanto è il nucleo dell'applicazione lineare $R_\phi : \psi \mapsto \psi \circ \phi$. Gli endomorfismi $\psi \in \mathscr{W}$ devono annullarsi sui vettori del sottospazio $\operatorname{im}\phi$ e possono assumere valori arbitrari su (la base di) un qualsiasi sottospazio complementare. Quindi $\dim \mathscr{W} = 8$ e una base di $\mathscr{W}$ è costituita dagli endomorfismi $v_1 \otimes \eta_1$, $v_2 \otimes \eta_1$, $v_3 \otimes \eta_1$, $v_4 \otimes \eta_1$, $v_1 \otimes \eta_2$, $v_2 \otimes \eta_2$, $v_3 \otimes \eta_2$, $v_4 \otimes \eta_2$, ove $\eta_1 = v_1^*$ e $\eta_2 = v_2^* + 2v_4^*$ sono una base di $(\operatorname{im}\phi)^\perp \subset V^*$.

Un sistema di equazioni cartesiane che definisce il sottospazio $\mathscr{W}$ è

$$\begin{cases} a_{13} = 0 \\ a_{23} = 0 \\ a_{33} = 0 \\ a_{43} = 0 \\ 2a_{12} - a_{14} = 0 \\ 2a_{22} - a_{24} = 0 \\ 2a_{32} - a_{34} = 0 \\ 2a_{42} - a_{44} = 0 \end{cases}.$$

Lo si poteva ricavare anche scrivendo una generica matrice X tale che $XA = 0$. □

ESERCIZIO 3. [12 punti] *Si considerino i sottospazi U e W dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, definiti dalle condizioni*

$$U : \begin{cases} 4X_1 - X_2 - 2X_3 + 2X_4 = 0 \\ 2X_1 + X_2 - X_3 - 2X_4 = 0 \\ 6X_1 - 2X_2 - 3X_3 + 4X_4 = 0 \end{cases} \quad e \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(a) Si determinino le dimensioni dei sottospazi U, W, $U \cap W$ e $U + W$ e si completi una base di U ad una base di $U + W$. Se necessario, si completi la base così ottenute ad una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ di $\mathbb{R}^4$.

(b) Se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ si scriva la matrice in base canonica dell'endomorfismo $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ che manda ogni vettore nella sua proiezione in U, parallelamente a W. In caso contrario, si fissi a piacere un complementare T di U e si determini la matrice della proiezione, π, su U, associata a questa decomposizione.

(c) Sia B la matrice, in base canonica della simmetria $\sigma = 2\pi - \mathrm{id}$. Si può trovare una matrice ortogonale H (ovvero con ${}^tH = H^{-1}$), tale che la matrice $C_t = tH + (1-t)B$ sia invertibile e U sia contenuto nell'autospazio relativo ad 1, per ogni $t \in [0,1]$?

Svolgimento. (a) Il sistema che definisce U ha rango 2, quindi $\dim U = 2$ e $U = \langle e_1 + 2e_3, 2e_2 + e_4\rangle$. Anche $\dim W = 2$ e $W = \langle e_1 - e_3, e_2 - e_4\rangle$. Se ne deduce che $U \cap W = \langle 0\rangle$ e la base $\mathcal{V}$ di $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$, può essere costituita da

$$v_1 = e_1 + 2e_3, \quad v_2 = 2e_2 + e_4, \quad v_3 = e_1 - e_3, \quad v_4 = e_2 - e_4.$$

(b) La matrice è

$$A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Sia $\sigma = 2\pi - \mathrm{id}$ la simmetria di asse U e direzione W; sia $s_U : \mathbb{R}^4 - \mathbb{R}^4$ la simmetria ortogonale di asse U e indichiamo con p_U e $p_{U^\perp}$ le proiezioni ortogonali su U e $U^\perp$, di modo che $s_U = p_U - p_{U^\perp}$. Poniamo quindi $B = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma)$ e $H = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(s_U)$. Dato $t \in [0,1]$, indichiamo con $\psi_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da $\psi_t(x) = (1-t)\sigma(x) + ts_U(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^4$. Se $x = u + w$ con $u \in U$ e $w \in W$, si ha $\sigma(x) = u - w$ e $s_U(x) = u + p_U(w) - p_{U^\perp}(w)$, da cui si deduce $\psi_t(x) = u + (2t-1)p_U(w) - p_{U^\perp}(w)$. Quindi $\psi_t(x) = 0$ se, e solo se, $u + (2t-1)p_U(w) = 0$ e $p_{U^\perp}(w) = 0$ e quindi $w \in W \cap \ker p_{U^\perp} = W \cap U = \langle 0\rangle$; da cui si deduce $u = (1-2t)p_U(w) = 0$. Ciò significa $\ker\psi_t = \langle 0\rangle$ e quindi ψ_t invertibile; e dallo stesso calcolo si ricava $\psi_t(u) = u$ per ogni $u \in U$, qualunque sia $t \in [0,1]$ e ciò permette di concludere che H soddisfa a tutte le condizioni richieste. In particolare, si può verificare che, per ogni $t \in [0,1]$, ψ_t è una simmetria di asse U.

□