Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 17 settembre 2013

ESERCIZIO 1. [6 punti]

(a) *Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss le soluzioni dell'equazione* $z^3 = i(z+1)^3$.

(b) *Si determini, se esiste, una trasformazione di Möbius,* $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, *che mandi le radici dell'equazione precedente su punti della circonferenza unitaria.*

Svolgimento. $z = 1$ non è una soluzione, per cui l'equazione data è equivalente a $\left(\frac{z}{z+1}\right)^3 = i$. Le radici cubiche di i sono i numeri complessi

$$e^{i\pi/6} = \tfrac{\sqrt{3}}{2} + i\tfrac{1}{2}, \qquad e^{5i\pi/6} = -\tfrac{\sqrt{3}}{2} + i\tfrac{1}{2}, \qquad e^{3i\pi/2} = -i.$$

Le radici cercate sono quindi,

$$\tfrac{e^{i\pi/6}}{1-e^{i\pi/6}} = \tfrac{\sqrt{3}-2+i}{4-2\sqrt{3}}, \qquad \tfrac{e^{5i\pi/6}}{1-e^{5i\pi/6}} = \tfrac{-2-\sqrt{3}+i}{4+2\sqrt{3}}, \qquad \tfrac{-i}{1+i} = -\tfrac{1+i}{2}.$$

Naturalmente, la trasformazione $z \mapsto \frac{z}{z+1}$, manda le tre radici del polinomio sulle radici cubiche di i, che sono sulla circonferenza unitaria. □

ESERCIZIO 2. [12 punti] *Si consideri il seguente sistema lineare a coefficienti razionali.*

$$\begin{cases} 2X_1 - 2X_2 + 3X_3 + 2X_4 + X_5 = 0 \\ X_1 - X_2 - X_5 = -1 \\ X_1 - X_2 + 3X_4 - X_5 = 2 \end{cases}.$$

(a) *Si determinino le soluzioni* $S \subset \mathbb{Q}^5$ *del sistema lineare. Si determinino gli endomorfismi* $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ *tali che* $\mathrm{im}\phi \subseteq \langle S \rangle \subseteq \ker\phi$, $\phi(e_3+e_5) = e_1 - e_3 + e_5$ *e* $\phi(e_3 - e_5) = e_3 - e_4 - e_5$. *Si scriva la matrice, in base canonica, di tali endomorfismi.*

(b) *Sia* $\mathcal{E}^* = \{e_1^*, \dots, e_5^*\}$ *la base duale. Si scrivano i* ϕ *del punto precedente come combinazione lineare degli endomorfismi* $e_i \otimes e_j^*$. *Si determinino, se esistono,* r *vettori* $w_1, \dots, w_r$ *di* $\mathbb{Q}^5$ *ed* r *forme lineari* $\zeta_1, \dots, \zeta_r$ *del duale tali che* $\phi = w_1 \otimes \zeta_1 + \dots + w_r \otimes \zeta_r$, *ove* $r = \mathrm{rk}\phi$ *è il rango di* ϕ. *Si determini, se esiste, una base* $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ *di* $\mathbb{Q}^5$ *tale che* $\phi = v_1 \otimes v_1^* + \dots + v_r \otimes v_r^*$, *ove* $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_5^*\}$ *è la base duale della base* $\mathcal{V}$.

(c) *Siano* $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ *una base di* $\mathbb{Q}^5$ *e* $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_5^*\}$ *la base duale. È vero che ogni endomorfismo invertibile di* $\mathbb{Q}^5$ *è composizione di un numero finito di endomorfismi del tipo*

$$\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^5} + a v_i \otimes v_j^* \quad \text{con } a \in \mathbb{Q} \text{ e } i \neq j, \qquad \text{e} \qquad \mathrm{id}_{\mathbb{Q}^5} + (b-1) v_i \otimes v_i^* \quad \text{con } b \in \mathbb{Q}^\times \text{ e } i = 1, \dots, 5.$$

Si discuta lo stesso problema in $\mathbb{Q}^n$, *per qualsiasi* $n \geq 1$.

Svolgimento. (a) Si ha

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{e quindi} \qquad \langle S \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

In base alle condizioni date, ϕ ha rango almeno 2 e quindi ha un nucleo di dimensione 3 e si ha

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 5} = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1/2 & -1 & 1/2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Si ha $\phi = \sum_{1\le i,j\le 5} a_{ij} v_i \otimes v_j^*$ ed è un endomorfismo di rango 2. Posto,

$$w_1 = e_3 - e_4 - e_5, \quad w_2 = e_1 - e_4, \qquad \text{e} \qquad \zeta_1 = e_1^* - e_2^* - e_4^* - e_5^*, \quad \zeta_2 = \tfrac{1}{2}(e_3^* - e_5^*);$$

si ha $\phi = w_1 \otimes \zeta_1 + w_2 \otimes \zeta_2$. Mentre non può esistere una base per cui $\phi = v_1 \otimes v_1^* + v_2 \otimes v_2^*$, perché si dovrebbe avere

$$\operatorname{im}\phi = \langle v_1, v_2\rangle \subset \ker\phi = \langle v_1^*, v_2^*\rangle^{\perp} = \langle v_3, v_4, v_5\rangle\,.$$

(c) Gli endomorfismi dati sono trasformazioni elementari. Le loro matrici nella base $\mathcal{V}$ sono le matrici elementari, diverse dalle matrici di scambio. Si tratta quindi di dimostrare che anche gli scambi si possono ottenere come composizione di questi isomorfismi per poter concludere, visto che le trasformazioni elementari sono generatori del gruppo $\mathrm{GL}(V)$, per ogni spazio di dimensione finita V. Infatti, si ha

$$H(i,j) = (\mathrm{id}_V - 2v_j \otimes v_j^*)(\mathrm{id}_V + v_i \otimes v_j^*)(\mathrm{id}_V - v_j \otimes v_i^*)(\mathrm{id}_V + v_i \otimes v_j^*)$$

e ciò permette di concludere. □

ESERCIZIO 3. [12 punti] *Siano V e W spazi vettoriali complessi e siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, w_2\}$ delle rispettive basi.*

(a) Si determinino le applicazioni lineari $\phi : V \to W$ tali che, $v_3 - 2v_4 \in \phi^{-1}\{w_2\}$ e $\phi^{-1}\{w_1 - 2w_2\} = (v_1 + 2v_3) + \langle v_1 - 2v_4, v_2 - 2v_3\rangle$; e se ne scrivano le matrici nelle basi date.

(b) Si consideri l'insieme $S = \{\, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W,V) \mid \phi\circ\psi = \mathrm{id}_W \,\}$. Si dica se l'insieme

$$\mathcal{X} = \{\, \psi_1 - \psi_2 \mid (\psi_1, \psi_2) \in S \times S \,\}$$

è un sottospazio, una sottovarietà lineare o altro in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W,V)$ e si determinino l'eventuale dimensione e il corrispondente sottoinsieme di matrici $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathcal{X})$.

(c) Si dia una condizione necessaria e sufficiente sulla matrice di $\xi \in \mathcal{X}$, affinché si abbia $\operatorname{im}\xi \oplus \langle v_3, v_4\rangle = V$. È vero che il complementare dell'insieme di queste matrici è descritto da un insieme finito di equazioni algebriche? . . . sono equazioni lineari?

Svolgimento. (a) I vettori $v_1 - 2v_4, v_2 - 2v_3, v_1 + 2v_3, v_3 - 2v_4$ sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di V. Per cui esiste un'unica applicazione lineare che soddisfa alle condizioni date e la sua matrice è

$$B = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 1/3 & 1/6 \\ -1 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

(b) S è una sottovarietà lineare e $\mathcal{X}$ ne è lo spazio direttore. Gli elementi di $\mathcal{X}$ sono applicazioni lineari $\xi : W \to V$ tali che $\phi \circ \xi = 0$ e quindi coincide con il sottospazio di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W,V)$ formato dagli omomorfismi la cui immagine è contenuta in $\ker\phi$. Un sottospazio di dimensione 4 a cui corrisponde il sottospazio di matrici

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

tramite l'isomorfismo $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}$.

(c) Il sottospazio $\langle v_3, v_4\rangle$ è un complementare di $\ker\phi = \langle v_1 - 2v_4, v_2 - 2v_3\rangle$. Quindi, affinché si abbia $\operatorname{im}\xi \oplus \langle v_3, v_4\rangle = V$, è necessario e sufficiente che $\operatorname{im}\xi = \ker\phi$, ovvero che ξ abbia rango massimo. Il complementare è formato dalle matrici in $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathcal{X})$ di rango ≤ 1, ovvero quelle per cui si annullano tutti i minori di ordine 2 che danno sei equazioni algebriche (di secondo grado e non 'indipendenti') di cui queste matrici sono soluzione. □