Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

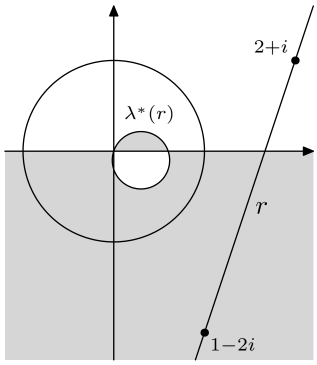
prova scritta del 18 febbraio 2013 – Compito **A**

ESERCIZIO 1. [6 punti] *Si determinino i numeri complessi* z_1, z_2 *tali che* $\begin{cases} z_1 + z_2 = 3 - i \\ z_1 z_2 = 4 - 3i \end{cases}$.

(a) Si disegni nel piano di Gauss la retta (reale), r, che le contiene z_1 *e* z_2 *e si determini l'equazione di r nelle coordinate* z *e* $\bar{z}$.

(b) Si determinino centro e raggio della circonferenza che si ottiene riflettendo r lungo la circonferenza unitaria. Si disegni l'immagine tramite questa riflessione dei punti del piano che si trovano tra l'asse reale e la retta r.

Svolgimento. Ricordiamo che la riflessione rispetto alla circonferenza unitaria è l'applicazione $\lambda(z) = \frac{1}{\bar{z}}$, definita per $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$.



(a) I punti z_1 e z_2 sono le radici del polinomio $P(X) = X^2 - (3 - i)X + (4 - 3i)$, ovvero $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = 1 - 2i$. La retta che li contiene ha equazione $(3-i)\bar{z} + (3+i)z - 10 = 0$ ed è rappresentata nel disegno a fianco.

(b) La circonferenza riflessa, $\lambda^*(r)$ ha equazione $z\bar{z} - \frac{3-i}{10}\bar{z} - \frac{3+i}{10}z = 0$ e quindi centro in $\frac{3-i}{10}$ e raggio $\frac{1}{\sqrt{10}}$. La regione delimitata dall'asse reale e dalla retta r si compone delle due parti

$$\begin{cases} i\bar{z} - iz > 0 \\ (3-i)\bar{z} + (3+i)z - 10 > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} i\bar{z} - iz < 0 \\ (3-i)\bar{z} + (3+i)z - 10 < 0 \end{cases}.$$

La riflessione nella circonferenza unitaria produce le due regioni evidenziate in grigio nella figura (bordi esclusi), ove mettiamo in evidenza il fatto che non appartiene a queste regioni la superficie a sinistra dell'asse immaginario e all'interno della circonferenza $\lambda^*(r)$, il cui colore bianco non risulta abbastanza evidente nelle dimensioni del disegno. □

ESERCIZIO 2. [12 punti] *Nello spazio* $\mathbb{R}^5$, *con la base canonica* $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_5\}$, *si considerino i sottospazi*

$$W_1 = \langle e_1 - 3e_3,\, 2e_1 + e_2 - e_3,\, 3e_1 + 2e_2 + e_3 \rangle, \qquad W_2 = \langle e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 \rangle,$$

$$W_3 : \begin{cases} 4X_1 + X_3 + 4X_5 = 0 \\ 2X_1 - 3X_2 + X_3 + 3X_5 = 0 \\ X_1 + 2X_2 + X_5 = 0 \end{cases}.$$

(a) Determinare le dimensioni e delle basi per ciascuno dei sottospazi dati. Determinare delle equazioni cartesiane per $W_1 + W_2$. *Si dica se* $\mathbb{R}^5 = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$.

(b) Si dica se è ben definita la simmetria $\sigma_3 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, *di asse* W_3 *e direzioni* $W_1 + W_2$ *e, in caso affermativo, se ne determini la matrice* $A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma_3)$.

(c) Dette σ_1 *la simmetria di asse* W_1 *e direzioni* $W_2 + W_3$ *e* σ_2 *la simmetria di asse* W_2 *e direzioni* $W_1 + W_3$, *si ponga* $\phi = 2\sigma_1 - \sigma_2 + 3\sigma_3$ *in* $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^5$. *Si calcolino* $\det\phi$ *ed il polinomio caratteristico* $p_\phi(X)$. *Che dire degli spazi di autovettori relativi?*

Svolgimento. (a) I tre generatori di W_1 sono linearmente dipendenti, infatti, si ha $(e_1 - 3e_3) - 2(2e_1 + e_2 - e_3) + (3e_1 + 2e_2 + e_3) = 0$; quindi due tra essi danno una base di W_1, ad esempio $w_1 = e_1 - 3e_3$ e $w_2 = 2e_1 + e_2 - e_3$, e $\dim W_1 = 2$.

Chiaramente $\dim W_2 = 1$ e il generatore,$w_3 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5$, è una base del sottospazio.

Il sistema omogeneo che definisce W_3 ha rango 3 e due soluzioni linearmente indipendenti sono $w_4 = e_4$ e $w_5 = e_1 - e_2 - 8e_3 + e_5$. Queste sono una base di W_3 che ha dimensione 2.

Il sottospazio $W_1 + W_2$ è soluzione del sistema di equazioni cartesiane $\begin{cases} 3X_1 - 5X_2 + X_3 + X_4 = 0 \\ X_4 - X_5 = 0 \end{cases}$.

Si osservi che $W_1 \cap W_2 = \langle 0 \rangle$, (tutti gli elementi di W_1 soddisfano l'equazione $X_4 = 0$). Se mostriamo che $(W_1 \oplus W_2) \cap W_3 = \langle 0 \rangle$, i tre spazi sono in somma diretta e, per un calcolo di dimensioni, la loro somma coincide con tutto $\mathbb{R}^5$. Un generico elemento di W_3 ha coordinate ${}^t(s, -s, -8s, t, s)$, al variare di $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, ed appartiene a $W_1 \oplus W_2$ se, e solo se, le sue coordinate soddisfano alle equazioni cartesiane scritte sopra, che danno $\begin{cases} t = 0 \\ s - t = 0 \end{cases}$ e quindi $s = 0 = t$.

(b) I vettori $w_1, \dots, w_5$ del punto precedente sono quindi una base, $\mathcal{W}$, di $\mathbb{R}^5$ e quindi esiste la simmetria σ_3 e si ha

$$B = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\sigma_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 18 & -4 & 0 & -3 \\ 6 & -9 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

La matrice cercata è quindi

$$A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma_3) = PBP^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -10 & 2 & 0 & 2 \\ -6 & 9 & -2 & 0 & -2 \\ -48 & 80 & -17 & 0 & -16 \\ 6 & -10 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & -10 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Utilizzando la base $\mathcal{W}$, si ha

$$\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\det \phi = 0$; il polinomio caratteristico di ϕ è $X^2(X+6)(X-2)^2$ e gli spazi di autovettori sono $W_1 = \ker \phi$, $W_2 = \ker(\phi + 6\mathrm{id})$, $W_3 = \ker(\phi - 2\mathrm{id})$. □

ESERCIZIO 3. [12 punti] *Si determini il sottoinsieme S di $\mathbb{Q}^5$ formato dalle soluzioni del sistema lineare*

$$\begin{cases} X_1 - X_3 - X_4 + X_5 = 0 \\ X_2 + X_4 + 3X_5 = 3 \\ 3X_1 + X_2 - 3X_3 - 2X_4 + 3X_5 = 0 \\ X_1 + X_2 - X_3 + 2X_5 = 1 \end{cases}.$$

(a) *Si determinino tutti i sistemi minimali di equazioni lineari che hanno lo stesso insieme S di soluzioni.*

(b) *Si determinino tutti gli endomorfismi $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ il cui nucleo contenga S e la cui immagine sia contenuta in S, si dica se formano un sottospazio di $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}^5$ e se ne calcoli la dimensione. Si risponda alla stessa domanda con $\langle S \rangle$ in luogo di S.*

(c) *Si determini il polinomio caratteristico di tutti gli endomorfismi del punto precedente e si dica quali tra questi sono diagonalizzabili.*

Svolgimento. Con operazioni elementari sulla matrice completa del sistema si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ III - 3I \\ IV - I \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \\ III \\ IV - III \\ II + 2III - 3IV \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Il sistema ha quindi soluzione e

$$S = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(*a*) I sistemi cercati si ottengono facendo operazioni elementari sulle prime tre righe della matrice a scalini ottenuta col procedimento di eliminazione. Poiché ogni matrice invertibile è prodotto di matrici elementari, possiamo scrivere che i sistemi minimali che hanno S come soluzione sono tutti e soli quelli della forma

$$\begin{cases} a_{11}(X_1 - X_3 - X_4 + X_5) + a_{12}(X_2 - X_4) + a_{13}(X_5 - 1) = 0 \\ a_{21}(X_1 - X_3 - X_4 + X_5) + a_{22}(X_2 - X_4) + a_{23}(X_5 - 1) = 0 \\ a_{31}(X_1 - X_3 - X_4 + X_5) + a_{32}(X_2 - X_4) + a_{33}(X_5 - 1) = 0 \end{cases}$$

ove $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le 3}$ varia nel gruppo $\mathrm{GL}(3, \mathbb{Q})$.

(*b*) Il nucleo e l'immagine di un'applicazione lineare sono sottospazi, quindi non può mai aversi $\operatorname{im}\phi \subseteq S$, visto che $0 \notin S$. L'insieme in questione è vuoto. La condizione sensata su ϕ è quindi $\operatorname{im}\phi \subseteq \langle S \rangle \subseteq \ker\phi$. I vettori $s_3 = e_1 + e_3$, $s_4 = e_1 - e_2 + e_4$ e $s_5 = -e_1 + e_5$ sono una base di $\langle S \rangle$ e possiamo completarli ad una base $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_5\}$ di $\mathbb{Q}^5$ con i vettori $s_1 = e_1$, $s_2 = e_2$. La condizione posta su ϕ dà

$$\alpha_{\mathcal{S},\mathcal{S}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 & 0 \\ e & f & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \left[\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} a+c-e & b+d-f & -a-c+e & -a+b-c+d+e-f & a+c-e \\ -c & -d & c & c-d & -c \\ a & b & -a & -a+b & a \\ c & d & -c & -c+d & c \\ e & f & -e & -e+f & e \end{pmatrix} \right]$$

da cui si vede chiaramente che (essendo $\xi \mapsto \alpha_{\mathcal{S},\mathcal{S}}(\xi)$ un isomorfismo di spazi vettoriali) gli endomorfismi in questione formano un sottospazio di dimensione 6 di $\operatorname{End}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}^5$.

(*c*) Infine, dalla matrice scritta sopra, si vede che il polinomio caratteristico di tutti gli endomorfismi descritti al punto precedente è X^5 e quindi che l'unico autovalore è 0 con molteplicità (algebrica) 5. La molteplicità geometrica (ovvero la dimensione di $\ker\phi$) uguaglia quella algebrica solo quando $\phi = 0$, che è quindi l'unico endomorfismo diagonalizzabile di quell'insieme. $\square$

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)
prova scritta del 18 febbraio 2013 – Compito **B**

ESERCIZIO 1. [6 punti] Si determinino i numeri complessi z_1, z_2 tali che $\begin{cases} z_1 + z_2 = 1 + 3i \\ z_1 z_2 = 3i - 4 \end{cases}$.

(a) Si disegni nel piano di Gauss la retta (reale), r, che le contiene z_1 e z_2 e si determini l'equazione di r nelle coordinate z e $\bar{z}$.
(b) Si determinino centro e raggio della circonferenza che si ottiene riflettendo r lungo la circonferenza unitaria. Si disegni l'immagine tramite questa riflessione dei punti del piano che si trovano tra l'asse immaginario e la retta r.

ESERCIZIO 2. [12 punti] Nello spazio $\mathbb{R}^5$, con la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_5\}$, si considerino i sottospazi

$$W_1 = \langle e_4 - 3e_5,\, e_3 + 2e_4 - e_5,\, 2e_3 + 3e_4 + e_5 \rangle, \qquad W_2 = \langle e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 \rangle,$$

$$W_3 : \begin{cases} 4X_1 + 4X_4 + X_5 = 0 \\ 3X_1 - 3X_3 + 2X_4 + X_5 = 0 \\ X_1 + 2X_3 + X_4 = 0 \end{cases}.$$

(a) Determinare le dimensioni e delle basi per ciascuno dei sottospazi dati. Determinare delle equazioni cartesiane per $W_1 + W_2$. Si dica se $\mathbb{R}^5 = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$.
(b) Si dica se è ben definita la simmetria $\sigma_3 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, di asse W_3 e direzioni $W_1 + W_2$ e, in caso affermativo, se ne determini la matrice $A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma_3)$.
(c) Dette σ_1 la simmetria di asse W_1 e direzioni $W_2 + W_3$ e σ_2 la simmetria di asse W_2 e direzioni $W_1 + W_3$, si ponga $\phi = 2\sigma_1 - \sigma_2 + 3\sigma_3$ in $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^5$. Si calcolino $\det\phi$ ed il polinomio caratteristico $p_\phi(X)$. Che dire degli spazi di autovettori relativi?

ESERCIZIO 3. [12 punti] Si determini il sottoinsieme S di $\mathbb{Q}^5$ formato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} 3X_1 - 2X_2 - 3X_3 + X_4 + 3X_5 = 0 \\ 3X_1 + X_2 + X_4 = 3 \\ X_1 - X_2 - X_3 + X_5 = 0 \\ 2X_1 - X_3 + X_4 + X_5 = 1 \end{cases}.$$

(a) Si determinino tutti i sistemi minimali di equazioni lineari che hanno lo stesso insieme S di soluzioni.
(b) Si determinino tutti gli endomorfismi $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ il cui nucleo contenga S e la cui immagine sia contenuta in S, si dica se formano un sottospazio di $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}^5$ e se ne calcoli la dimensione. Si risponda alla stessa domanda con $\langle S \rangle$ in luogo di S.
(c) Si determini il polinomio caratteristico di tutti gli endomorfismi del tipo $\mathrm{id} + \phi$, ove ϕ varia tra gli omomorfismi del punto precedente e si dica in quali casi $\mathrm{id} + \phi$ è diagonalizzabile.