---

**Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)**

prova scritta del 18 giugno 2013

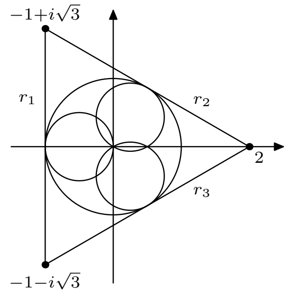
---

**ESERCIZIO 1.** [6 punti] *Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss tutti i numeri complessi $z$ tali che $z^2 - 2\bar{z} = 0$.*

(a) *Si determinino le equazioni delle rette del piano di Gauss che uniscono le coppie di numeri, diversi da 0, che soddisfano la condizione data. Si disegnino tali rette nel piano di Gauss.*

(b) *Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo le rette del punto precedente nella circonferenza unitaria e si disegnino tali circonferenze nel piano di Gauss.*

*Svolgimento.* (a) Il numero complesso 0 soddisfa alle condizioni date.
Se $z \neq 0$ soddisfa a tali condizioni, deve aversi $|z| = 2$ e quindi $\bar{z} = \frac{4}{z}$. I numeri complessi $z \neq 0$, soddisfacenti alle condizioni date, sono le radici del polinomio $X^3 - 8$. Quindi, i numeri cercati sono 0 e le radici terze di 8, 2, $2e^{2\pi i/3} = -1 + i\sqrt{3}$, $2e^{4\pi i/3} = -1 - i\sqrt{3}$. Le rette cercate hanno equazioni




$$r_1 : z + \bar{z} + 1 = 0, \qquad r_2 : (1 - i\sqrt{3})z + (1 + i\sqrt{3})\bar{z} - 4 = 0,$$
$$r_3 : (1 + i\sqrt{3})z + (1 - i\sqrt{3})\bar{z} - 4 = 0.$$

Le tre rette sono tangenti alla circonferenza unitaria nei punti corrispondenti alle radici terze di $-1$.
($b$) Le circonferenze hanno tutte raggio 1/2 e centri in $-1/2$, $(1 + i\sqrt{3})/4$, $(1 - i\sqrt{3})/4$, rispettivamente. □

**ESERCIZIO 2.** [12 punti] *Nello spazio vettoriale reale $V$, con la base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, si considerino i sottospazi*

$$W_1 : \begin{cases} 2X_1 - X_2 + X_4 = 0 \\ X_1 + 2X_2 - X_4 = 0 \\ X_1 - 3X_2 + 2X_4 = 0 \end{cases}, \qquad \text{e} \qquad W_2 = \langle v_1 + v_3,\ v_2 + v_3,\ v_1 - 2v_2 + v_4 \rangle .$$

(a) *Determinare la dimensione ed un sistema minimale di equazioni cartesiane per ciascuno dei sottospazi dati. Determinare una base per ciascuno dei sottospazi $W_1$, $W_2$, $W_1 \cap W_2$, $W_1 + W_2$.*

(b) *Si considerino i seguenti sottoinsiemi*

$$\mathscr{U} = \{ \phi \in \mathit{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) \mid \phi(W_1) \subseteq W_2,\ \phi(W_2) \subseteq W_1 \}$$
$$\mathscr{W} = \{ \psi \in \mathit{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) \mid \psi(W_1) \subseteq W_1,\ \psi(W_2) \subseteq W_2 \} .$$

*Si verifichi se sono sottospazi vettoriali e si determinino le eventuali dimensioni.*

(c) *In caso affermativo, si determini la dimensione di $\mathscr{U} \cap \mathscr{W}$ e si dica se $\mathscr{U} + \mathscr{W} = \mathit{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$. In ogni caso, è vero che l'applicazione $\eta : \mathscr{U} \times \mathscr{U} \to \mathscr{W}$, definita da $(\psi, \phi) \mapsto \psi \circ \phi$ è suriettiva?*

*Svolgimento.* (a) Le tre equazioni non sono indipendenti, essendo $(I - II - III = 0)$. Il sistema ha rango 2 e quindi $\dim W_1 = 2$. Invece, i tre generatori di $W_2$ sono linearmente indipendenti e perciò $\dim W_2 = 3$. Dei sistemi di equazioni minimali per i due sottopazi sono

$$W_1 : \begin{cases} X_1 + 2X_2 - X_4 = 0 \\ 5X_2 - 3X_4 = 0 \end{cases}, \qquad \text{e} \qquad W_2 : X_1 + X_2 - X_3 + X_4 = 0.$$

Si ha quindi

$$W_1 = \langle v_1 - 3v_2 + 7v_3 - 5v_4, v_3 \rangle , \quad W_2 = \langle v_1 - 3v_2 + 7v_3 - 5v_4, v_2 + v_3, v_1 + v_3 \rangle ,$$
$$W_1 \cap W_2 = \langle v_1 - 3v_2 + 7v_3 - 5v_4 \rangle , \quad W_1 + W_2 = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle ;$$

e i generatori indicati sono basi.

$(b)$ Posto, $U_1 = \langle v_3 \rangle$, $U_2 = \langle v_2 + v_3, v_1 + v_3 \rangle$, e $U_3 = W_1 \cap W_2$, si ha $W_1 = U_1 \oplus U_3$, $W_2 = U_2 \oplus U_3$ e $V = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$. Si hanno quindi le decomposizioni 'a blocchi' degli endomorfismi, ovvero

$$\begin{aligned}\mathscr{U} &= \{\, \phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V) \mid \phi(U_1) \subseteq U_2 \oplus U_3,\ \phi(U_2) \subseteq U_1 \oplus U_3,\ \phi(U_3) \subseteq U_3 \,\} \\ \mathscr{W} &= \{\, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V) \mid \phi(U_1) \subseteq U_1 \oplus U_3,\ \phi(U_2) \subseteq U_2 \oplus U_3,\ \phi(U_3) \subseteq U_3 \,\}.\end{aligned}$$

Da cui si deduce $\dim \mathscr{U} = 3 + 4 + 1 = 8$ e $\dim \mathscr{W} = 2 + 6 + 1 = 9$.

$(c)$ Gli endomorfismi appartenenti a $\mathscr{U} \cap \mathscr{W}$ sono tutti e soli quelli che mandano tutti i vettori di $V$ in $U_3 = W_1 \cap W_2$ e quindi $\mathscr{U} \cap \mathscr{W}$ è un sottospazio di dimensione 4, da cui si ottiene $\dim(\mathscr{U} + \mathscr{W}) = 13 < \dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V)$. Infatti, la somma dei due sottospazi contiene solo endomorfismi che lasciano stabile il sottospazio $U_3$.

Infine, tutti gli endomorfismi $\phi \in \mathscr{U}$ hanno un nucleo di dimensione positiva, perché mandano il sottospazio $W_2$, di dimensione 3, in $W_1$, di dimensione 2. Quindi, se $\psi$ e $\phi$ appartengono ad $\mathscr{U}$, si ha $\det(\psi \circ \phi) = (\det \psi)(\det \phi) = 0$, mentre $\mathscr{W}$ contiene endomorfismi invertibili (ad esempio l'identità $\mathrm{id}_V$). Dunque, l'applicazione $\eta$ non può essere suriettiva. □

**ESERCIZIO 3**. [12 punti] *Si considerino i sottospazi $U$ e $W$ dello spazio vettoriale $\mathbb{Q}^4$, definiti dalle condizioni*

$$U : \begin{cases} 4X_1 - 2X_2 + 2X_3 - X_4 = 0 \\ 2X_1 - X_2 + X_3 - 3X_4 = 0 \\ 6X_1 - 3X_2 + 3X_3 + X_4 = 0 \end{cases} \quad e \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

*(a) Si determinino una base e un sistema minimale di equazioni cartesiane per ciascuno dei due sottospazi e si determini un sottospazio, $T$, tale che $(U \cap W) \oplus T = W$. È vero che per ogni tale sottospazio, $T$, si ha $U \oplus T = \mathbb{Q}^4$?*

*(b) Si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi)$, ove $\pi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, è la proiezione su $U$, parallelamente a $T$.*

*(c) Si indichi con $\sigma : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$ la simmetria di asse $U$ e direzione $T$ e si considerino gli endomorfismi $\phi_a = 2\pi - a\sigma$, con $a \in \mathbb{Q}$. Si calcoli il determinante di $\phi_a$ al variare di $a \in \mathbb{Q}$. Che dire dei determinanti degli endomorfismi $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^4, \mathbb{Q}^4) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^4, \mathbb{Q}^4)$ così definiti,*

$$\Phi : \psi \mapsto \phi_a \circ \psi, \qquad \Psi : \psi \mapsto \psi \circ \phi_a, \qquad \Xi : \psi \mapsto \phi_a \circ \psi \circ \phi_a.$$

*Svolgimento.* (a) Il sistema che definisce $U$ ha rango 2. Una base di $U$ è costituita dai vettori $u_1 = e_1 + 2e_2$ e $u_2 = e_2 + e_3$; un sistema minimale che definisce tale sottospazio è, ad esempio, $\begin{cases} 2X_1 - X_2 + X_3 = 0 \\ X_4 = 0 \end{cases}$.

I tre generatori dati di $W$ sono una base di tale spazio che è definito dall'equazione cartesiana $2X_1 - X_2 + 2X_3 = 0$. Quest'equazione non è soddisfatta dal vettore $u_2$ e quindi l'intersezione $U \cap W$ si limita al sottospazio $\langle u_1 \rangle$.

Possiamo prendere $T = \langle w_1, w_2 \rangle$, ove $w_1 = e_1 - e_3$, $w_2 = e_4$ e si ha $W = \langle u_1 \rangle \oplus T$ e $\mathbb{Q}^4 = U \oplus T$. Ogni altro sottospazio $T$, tale che $W = (U \cap W) \oplus T$, è del tipo $T_{(a,b)} = \langle w_1 + au_1, w_2 + bu_1 \rangle$, al variare di $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$. Ognuno di questi sottospazi ha dimensione 2 e si ha $T_{(a,b)} \cap U = (T_{(a,b)} \cap W) \cap U = T_{(a,b)} \cap (W \cap U) = \langle 0 \rangle$. Si conclude che $U \oplus T_{(a,b)} = \mathbb{Q}^4$, per ogni valore di $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$.

$(b)$ Scegliamo $T = \langle w_1, w_2 \rangle$, ove $w_1 = e_1 - e_3$, $w_2 = e_4$ e si ottiene la matrice

$$A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \left[ A - \begin{pmatrix} 2a & -a & a & b \\ 4a & -2a & 2a & 2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ scegliendo } T_{(a,b)}. \right]$$

$(c)$ Prendendo la base $u_1, u_2, w_1, w_2$ per $\mathbb{Q}^4$, si calcola immediatamente, $\det \phi_a = a^2(2-a)^2$. Ragionando analogamente, si ha $\det \Phi = (\det \phi_a)^4 = \det \Psi$ e $\det \Xi = (\det \Phi)(\det \Psi)$ per il Teorema di Binet. □