Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 28 gennaio 2013

ESERCIZIO 1. [12 punti] *Nello spazio vettoriale complesso $V = \mathbb{C}^2$, con la base canonica $\{e_1, e_2\}$, si considerino i sottospazi*

$$U = \left\{ c \begin{pmatrix} i \\ -i \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{C} \right\} \qquad e \qquad W = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid 2iz_1 - z_2 = 0 \right\}.$$

(a) *Si determinino tutti gli endomorfismi ($\mathbb{C}$-lineari) $\phi : V \to V$ tali che $W \subseteq \ker(\phi - \mathrm{id})$ e $U \subseteq \mathrm{im}(\phi - \mathrm{id})$; se ne scrivano le matrici in base canonica e se ne calcoli il determinante.*

(b) *Si dica se gli endomorfismi del punto precedente sono tutti diagonalizzabili e si determinino autovalori e autovettori per ciascun endomorfismo.*

(c) *Si determinino gli endomorfismi $\phi : V \to V$ quale spazio vettoriale reale tali che $W \subseteq \ker(\phi - \mathrm{id})$ e $U \subseteq \mathrm{im}(\phi - \mathrm{id})$ e si dica quando sono invertibili. È vero che ognuno di questi endomorfismi è diagonalizzabile?*

Svolgimento. (a) Si ha $\mathbb{C}^2 = U \oplus W$ e quindi $\ker(\phi - \mathrm{id}) = W = \langle(2i, -1)\rangle^\perp$ e $\mathrm{im}(\phi - \mathrm{id}) = U = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$. Quindi le possibili matrici $A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi)$ sono tutte e sole quelle che soddisfano alla condizione

$$A - \mathbf{1}_2 = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (2i \ \ -1) = \begin{pmatrix} 2ic & -c \\ -2ic & c \end{pmatrix}, \qquad \text{al variare di } c \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}.$$

Si ha quindi, $\det A = (1 + 2ic)(1 + c) - 2ic^2 = 1 + (1 + 2i)c$.

(b) Si possono evitare calcoli tediosi osservando che, per costruzione, ϕ ha l'autovalore 1 con nullità maggiore o uguale a 1. Quindi se ϕ ha un altro autovalore distinto da 1 l'endomorfismo è certamente diagonalizzabile. Il prodotto degli autovalori è $\det\phi = 1 + (1 + 2i)c$, che è diverso da 1 per $c \neq 0$ e quindi ϕ è diagonalizzabile in ogni caso. Lo spazio di autovettori relativi a 1 è W, mentre lo spazio di autovettori relativi all'autovalore $1 + (1 + 2i)c$ è U (quest'ultima affermazione si può verificare con un calcolo diretto, oppure. . .).

(c) Come nel caso complesso si ha $\mathbb{C}^2 = U \oplus W$ e quindi $\ker(\phi - \mathrm{id}) = W = \langle(2i, -1)\rangle^\perp$ e $\mathrm{im}(\phi - \mathrm{id}) = U = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$. Prendendo una base $\mathcal{V} = \{w_1, w_2, u_1, u_2\}$, ove $W = \langle w_1, w_2\rangle$ e $U = \langle u_1, u_2\rangle$, si vede che le possibili matrici $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ soddisfano alla condizione

$$A - \mathbf{1}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}, \qquad \text{con } ad - bc \neq 0.$$

Quindi ϕ è invertibile se, e solo se, -1 non è un autovalore per $\phi - \mathrm{id}$ (ovvero per $(\phi - \mathrm{id})_{|U}$; perché $\phi_{|W} = \mathrm{id}_W$). Ciò accade quando $1 + (a + d) + (ad - bc) \neq 0$. Non è vero che ϕ è sempre diagonalizzabile; ad esempio, se $a = d$ e $c = 0 \neq b$, ϕ ha l'autovalore $1 + a$ con molteplicità 2 e nullità 1. □

ESERCIZIO 2. [6 punti] *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo e W un sottospazio (proprio) di V tale che $\phi(w) \in W$, per ogni $w \in W$. Si indichi con $\phi_0 : W \to W$ la restrizione di ϕ a W, e con $\phi_1 : V/W \to V/W$ l'endomorfismo $x + W \mapsto \phi(x) + W$. Si verifichi che ϕ_1 è ben definito e si dica quali tra le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando la risposta.*

(a) $\mathrm{tr}\phi = \mathrm{tr}\phi_0 + \mathrm{tr}\phi_1$.

(b) $\det\phi = (\det\phi_0)(\det\phi_1)$.

(c) $rk\phi = rk\phi_0 + rk\phi_1$.

Svolgimento. Sia $w_1, \dots, w_k$ una base di W e la si completi ad una base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$ di V. Poiché $\phi(W) \subseteq W$, la matrice $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\phi)$ ha la forma (a blocchi) $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\phi) = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ 0 & C \end{smallmatrix}\right)$, ove A è quadrata di ordine k, B è $k \times (n - k)$ e C è quadrata di ordine $n - k$.

A è la matrice, nella base $w_1, \dots, w_k$, di ϕ_0. Inoltre, poiché le classi laterali $w_{k+1}+W, \dots, w_n+W$ sono una base di V/W, C è la matrice di ϕ_1 in questa base. Da ciò si ricava facilmente che (a) e (b) sono vere, mentre (c) è falsa, visto che nulla si può dire su B dalla sola conoscenza di A e C. $\square$

ESERCIZIO 3. [6 punti] *Siano date le basi $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, w_2\}$ degli $\mathbb{R}$-spazi vettoriali V e W e sia $\phi : V \to W$ l'applicazione lineare di matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ nelle basi date.*

(a) *Si determinino gli elementi degli insiemi*

$$\mathscr{L} = \{\, \xi \in Hom(W, V) \mid \xi \circ \phi = \mathrm{id}_V \,\} \qquad e \qquad \mathscr{R} = \{\, \xi \in Hom(W, V) \mid \phi \circ \xi = \mathrm{id}_W \,\}$$

e se ne scrivano le matrici nelle basi date.

(b) *Siano ora V e W spazi vettoriali di dimensioni rispettivamente n ed m sul campo $\mathbb{F}_{37}$ e sia $\phi : V \to W$ un omomorfismo suriettivo. Si determini in questo caso il numero di elementi degli insiemi $\mathscr{R}$ e $\mathscr{L}$.*

Svolgimento. (a) $\mathscr{L} = \varnothing$ perché ogni applicazione lineare del tipo $\xi \circ \phi$ ha rango al più $2 = \dim W$, mentre l'identità ha rango 3.

ϕ è suriettiva e quindi $\mathscr{R} = \xi_0 + \mathrm{Hom}\,(W, \ker\phi)$, ove $\xi_0 : W \to V$ manda ciascuno dei vettori di base in una delle sue controimmagini (scelta arbitrariamente). Nel caso in questione, possiamo prendere $u_1 = v_1 - v_3$, $u_2 = v_3$, $u_3 = v_1 + v_2 + v_3$ e si ha $\phi(u_1) = w_1$, $\phi(u_2) = w_2$, $\langle u_3 \rangle = \ker\phi$. I tre vettori formano una base, $\mathcal{U}$, di V e $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Quindi, se $\xi \in \mathscr{R}$, si ha $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{U}}(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$, al variare di a e b in $\mathbb{R}$. Le matrici cercate sono tutte e sole quelle del tipo

$$\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\mathrm{id})\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{U}}(\xi) = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\xi) = \begin{pmatrix} a+1 & b \\ a & b \\ a-1 & b+1 \end{pmatrix}.$$

(b) L'esistenza di un omomorfismo suriettivo garantisce che $n \geq m$. Se $n = m$, ϕ è un isomorfismo e i due insiemi $\mathscr{R}$ e $\mathscr{L}$ contengono entrambi il solo ϕ^{-1}. Se $n > m$, analogamente al caso reale, $\#\mathscr{L} = 0$ e $\#\mathscr{R} = \#(\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_{37}}(W, \ker\phi)) = 37^{m(n-m)}$. $\square$

ESERCIZIO 4. [6 punti] *Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{Q}^4$ con la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$.*

(a) *Si dica se esiste un'applicazione lineare $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$ tale che*

$$\phi(-2e_2+e_4) = -2e_2+e_4, \quad \phi(2e_1-e_3) = -4e_1+2e_3, \quad \phi(3e_1-e_3) = 9e_1-3e_3, \quad \phi(e_2-e_4) = -4e_2+4e_4.$$

In caso affermativo, si scriva la matrice $A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi)$ e si calcoli $\det A$.

(b) *Si determini il polinomio caratteristico $p_\phi(X)$, gli autovalori ed autovettori razionali e si dica se ϕ è diagonalizzabile su $\mathbb{Q}$. In caso positivo, si determinino una marice diagonale, D, e una matrice invertibile P tali che $P^{-1}AP = D$.*

Svolgimento. I quattro vettori

$$v_1 = -2e_2 + e_4, \quad v_2 = 2e_1 - e_3, \quad v_3 = 3e_1 - e_3, \quad v_4 = e_2 - e_4,$$

sono linearmente indipendenti e formano quindi una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ di $\mathbb{Q}^4$ e si ha

$$P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad P^{-1} = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{V}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Inoltre,

$$B = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 9 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e, quindi} \quad A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi) = BP^{-1} = \begin{pmatrix} 13 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 10 \\ -5 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

La base $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_4\}$ è costituita da autovettori per ϕ, perché si ha $\phi(v_1) = v_1$, $\phi(v_2) = -2v_2$, $\phi(v_3) = 3v_3$, $\phi(v_4) = -4v_4$. Quindi ϕ è diagonalizzabile e il suo polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X-1)(X+2)(X-3)(X+4)$. Inoltre, $\det A = \det \phi = 24$ e una matrice diagonale per ϕ è

$$D = P^{-1}B = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Dunque $D = P^{-1}AP$ e lo svolgimento è concluso. $\square$