Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 30 gennaio 2013

ESERCIZIO 1. [6 punti] *Si consideri il polinomio* $P(X) = X^2 + (1-i)X - (2+2i) \in \mathbb{C}[X]$.

(a) *Si determinino le radici di* $P(X)$ *e si disegni nel piano di Gauss la retta (reale),* r*, che le contiene.*

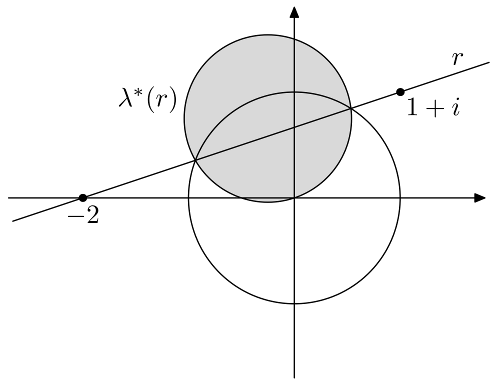
(b) *Si scriva l'equazione di* r *nelle coordinate* z *e* $\bar{z}$*. Si determinino centro e raggio della circonferenza che si ottiene riflettendo* r *lungo la circonferenza unitaria. Si disegni l'immagine tramite questa riflessione del semipiano soprastante ad* r*.*

Svolgimento. Ricordiamo che la riflessione rispetto alla circonferenza unitaria è l'applicazione $\lambda(z) = \frac{1}{\bar{z}}$, definita per $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$.

(a) Si ha

$$P(X) = X^2 + (1-i)X - (2+2i) = (X-1-i)(X+2).$$

Le due radici sono quindi -2 e $1+i$ e la retta r è rappresentata nel disegno a fianco.



(b) L'equazione della retta è

$$r : (1+3i)z + (1-3i)\bar{z} + 4 = 0.$$

La circonferenza riflessa, $\lambda^*(r)$ ha quindi centro in $\frac{3i-1}{4}$ e raggio $\frac{\sqrt{10}}{4}$.

Il semipiano soprastante la retta r è $\{\, z \in \mathbb{C} \mid (1+3i)z + (1-3i)\bar{z} + 4 < 0 \,\}$ (la disequazione ha senso perché il membro di sinistra è un numero reale, qualsiasi sia il numero complesso z). Nella riflessione lungo la circonferenza unitaria viene trasformato nell'insieme $\left\{\, z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z\bar{z} + \frac{1+3i}{4}z + \frac{1-3i}{4}\bar{z} < 0 \,\right\}$ che è quindi costituito dai punti interni alla circonferenza. □

ESERCIZIO 2. [12 punti] *Si consideri lo spazio vettoriale (complesso)* $V = M_2(\mathbb{C})$ *delle matrici* 2×2 *ad elementi in* $\mathbb{C}$ *e siano*

$$S = \left\{\, A \in M_2(\mathbb{C}) \,\middle|\, {}^tA = A \,\right\} \qquad e \qquad U = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i & i \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(a) *Si verifichi che* S *è un sottospazio e si determinino le dimensioni e una base per i sottospazi* S, U, $S \cap U$, $S + U$.

(b) *Fissata una matrice* $A \in V$ *si consideri l'applicazione* $f_A : V \to \mathbb{C}$*, definita da* $f_A(X) = \operatorname{tr}({}^tAX)$*, al variare di* X *in* V*. Si verifichi che* $f_A \in V^*$*. Determinare nucleo e immagine dell'applicazione* $f : V \to V^*$, $A \mapsto f_A$.

(c) *Si dica se esiste una forma lineare* $\zeta \in V^*$ *tale che* $\zeta(X) = \zeta(Y)$ *per ogni* $X, Y \in S$ *e* $\zeta(T) = 2+i$*, quando* $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$*. In caso affermativo, si dica se esiste una matrice* A *in* V *tale che* $\zeta = f_A$ *e si spieghi come trovarla.*

Svolgimento. (a) Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$. $A \in S$ se, e solo se, $b = c$ e quindi S è un sottospazio perché insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo nelle coordinate di V. Il sistema ha rango 1, quindi $\dim S = 3$ ed una base è costituita, ad esempio, dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

I due generatori di U sono linearmente indipendenti e quindi il sottospazio ha dimensione 2 e i generatori dati sono una base. Un generico elemento di U è della forma $\begin{pmatrix} 2i\beta & 2\alpha+i\beta \\ -i\alpha-\beta & \alpha \end{pmatrix}$, al variare di $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$; questo elemento sta in S se, e solo se,

$$2\alpha + i\beta = -i\alpha - \beta, \qquad \text{ovvero} \qquad (2+i)\alpha + (1+i)\beta = 0.$$

Quindi $S \cap U$ ha dimensione 1 ed è generato da $\begin{pmatrix} 2-4i & 3 \\ 3 & 1+i \end{pmatrix}$ $(\alpha = 1+i,\ \beta = -2-i)$.

Per le relazioni di Grassmann, $\dim(S+U) = 4 = \dim V$ e quindi $S + U = V$ ed una base di tale spazio è, ad esempio, la base canonica delle matrici 2×2.

(b) La traccia di una matrice è la somma degli elementi posti sulla diagonale principale. Quindi, posto

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{si ha} \qquad \operatorname{tr}({}^tAX) = a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} + a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22},$$

che è un polinomio lineare omogeneo nelle entrate della matrice X (forma lineare). Quindi $f_A \in V^*$ e l'applicazione $A \mapsto f_A$ è lineare, perché l'espressione precedente è lineare anche rispetto alle entrate di A[†].

Dalla formula scritta sopra si deduce che, se $a_{ij} \neq 0$, allora $f_A(\varepsilon(ij)) = 1$ ($\varepsilon(ij)$ è l'elemento della base canonica di V che ha tutte le entrate nulle, eccetto quella di posto (i,j) che è uguale ad 1). Quindi l'unica matrice A per cui la forma f_A è identicamente nulla è $A = 0$. Ciò significa che $f : V \to V^*$ è iniettiva e quindi suriettiva (formula delle dimensioni).

(c) Da quanto appena visto possiamo concludere che, se esiste una forma lineare, ζ, soddisfacente alle condizioni poste, allora esiste una matrice A tale che $f_A = \zeta$, perché f è suriettiva.

$T \in U \setminus (U \cap S)$ e quindi $V = S \oplus \langle T \rangle$, quindi esiste un'unica forma lineare ζ soddisfacente alle condizioni poste. Dovendo annullarsi su S e valere $2+i$ sulla matrice T, si ha $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (usare la formula esplicita di f_A per scrivere un sistema lineare nelle entrate della matrice A). □

ESERCIZIO 3. [6 punti] *Sia V uno spazio vettoriale reale e $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Un sottospazio W di V si dice stabile rispetto a ϕ se $\phi(w) \in W$ per ogni $w \in W$. Sia W un sottospazio stabile rispetto a ϕ; allora*

(a) È vero che $W + \ker\phi$ è stabile rispetto a ϕ?
(b) È vero che $W^\perp$ è stabile rispetto a ϕ^*?
(c) È vero che $\phi_1 : v + W \mapsto \phi(v) + W$ è un endomorfismo di V/W?
(d) È vero che ϕ è completamente determinato se si conoscono $\phi_1 : V/W \to V/W$ e $\phi_0 = \phi_{|W} : W \to W$?

Svolgimento. (a) Se $x \in W$ e $y \in \ker\phi$, $\phi(x+y) = \phi(x) \in W \subseteq W + \ker\phi$, perché W è stabile. Quindi si tratta di un sottospazio stabile.

(b) Se $v^* \in W^\perp$, e $x \in W$, allora $\phi^*(w^*) \circ x = w^* \circ \phi(x) = 0$, perché, $\phi(x) \in W$. Quindi $W^\perp$ è stabile rispetto a ϕ^*.

(c) Sia ora $v \in V$ e sia $v + w$ un altro rappresentante della classe laterale $v + W$ in V/W. Allora $\phi(v+w) = \phi(v) + \phi(w) \in \phi(v) + W$, perché $\phi(w) \in W$. Dunque l'applicazione $\phi_1 : V/W \to V/W$ è ben definita ed è un endomorfismo, perché ϕ lo è.

(d) Infine, la conoscenza di ϕ_0 e ϕ_1 non determina completamente ϕ (farsi un esempio). □

ESERCIZIO 4. [6 punti] *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C e sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo diagonalizzabile. Si mostri che l'endomorfismo trasposto $\phi^* : V^* \to V^*$ è diagonalizzabile e si scrivano le relazioni esistenti tra gli autovalori e le rispettive molteplicità per i due endomorfismi. Si dica quali relazioni vi sono tra i sottospazi di autovettori dei due endomorfismi.*

Svolgimento. Sia $c \in C$ uno scalare e consideriamo il sottospazio $\ker(\phi^* - c)$. Si ha

$$\ker(\phi^* - c) = \ker(\phi - c)^* = \operatorname{im}(\phi - c)^\perp,$$

[†] Detto in altro modo, $f : V \to V^*$ è l'applicazione lineare associata all'applicazione bilineare $(A, X) \mapsto \operatorname{tr}({}^tAX)$.

e quindi i sottospazi $\ker(\phi^* - c)$ e $\ker(\phi - c)$ hanno la stessa dimensione. Ciò significa che $\phi^* : V^* \to V^*$ ha gli stessi autovalori con le stesse molteplicità geometriche (nullità) di ϕ. Dunque ϕ^* è diagonalizzabile se (e solo se) ϕ lo è.

Siano $a_1, \ldots, a_r$ gli autovalori di ϕ, a due a due distinti. Allora si ha

$$V = \ker(\phi - a_1) \oplus \cdots \oplus \ker(\phi - a_r).$$

Se un vettore $0 \neq v \in \ker(\phi - a_j)$, si ha $(\phi - a_1)(v) = (a_j - a_1)v$, che è diverso da 0 se $j \neq 1$ e quindi

$$\operatorname{im}(\phi - a_1) = \ker(\phi - a_2) \oplus \cdots \oplus \ker(\phi - a_r),$$

da cui si deduce che

$$\ker(\phi^* - a_1) = \operatorname{im}(\phi - a_1)^\perp = \ker(\phi - a_2)^\perp \cap \cdots \cap \ker(\phi - a_r)^\perp$$

e quindi i sottospazi $\ker(\phi^* - a_1)$ e $\ker(\phi - a_1)$ sono naturalmente in dualità (ovvero la restrizione del tondino $\circ : V^* \times V \to C$ ai due sottospazi è un'applicazione bilineare non degenere). Il ragionamento è analogo per gli altri autovalori. $\square$