Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 30 novembre 2012 – Compito **A**

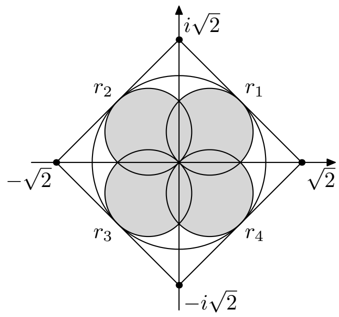
ESERCIZIO 1. *Si consideri il polinomio $P(X) = X^4 - 4 \in \mathbb{C}[X]$.*

(a) Si determinino (in forma algebrica) le radici in $\mathbb{C}$ del polinomio $P(X)$ e le si disegni nel piano di Gauss.

(b) Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati del quadrato, Q, avente come vertici le radici di $P(X)$ e si scrivano tali equazioni in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(c) Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del quadrato Q nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione $I \smallsetminus \lambda_*(I)$ ove si indichino con I i punti interni al quadrato Q.

Svolgimento. (a) $P(X) = X^4 - 4 = (X - \sqrt{2})(X - i\sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X + i\sqrt{2})$ e disegnamo qui sotto il quadrato che ha come vertici le quattro radici.



(b) Le rette sono (cfr. il disegno a fianco)

$$\begin{aligned} r_1 &: (1-i)z + (1+i)\bar{z} - 2\sqrt{2} = 0, \\ r_2 &: (1+i)z + (1-i)\bar{z} + 2\sqrt{2} = 0, \\ r_3 &: (1-i)z + (1+i)\bar{z} + 2\sqrt{2} = 0, \\ r_4 &: (1+i)z + (1-i)\bar{z} - 2\sqrt{2} = 0. \end{aligned}$$

(c) Le immagini delle quattro rette tramite la riflessione nel cerchio unitario sono le quattro circonferenze ad esse tangenti:

$$\lambda^*(r_1) : \left| z - \frac{1+i}{2\sqrt{2}} \right| = \frac{1}{2}, \qquad \lambda^*(r_2) : \left| z + \frac{1-i}{2\sqrt{2}} \right| = \frac{1}{2},$$
$$\lambda^*(r_3) : \left| z + \frac{1+i}{2\sqrt{2}} \right| = \frac{1}{2}, \qquad \lambda^*(r_4) : \left| z - \frac{1-i}{2\sqrt{2}} \right| = \frac{1}{2}.$$

La parte ombreggiata rappresenta l'insieme $I \smallsetminus \lambda_*(I)$ (compreso il bordo, con l'eccezione dei punti appartenenti ai lati del quadrato). □

ESERCIZIO 2. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una sua base (ordinata).*

(a) Dire se esiste un'applicazione lineare $\phi : V \to V$ tale che

$$\phi(v_1 + 2v_3) = v_2 - 3v_4 = \phi(2v_1 - v_3), \qquad e \qquad \phi(2v_2 + v_4) = 3v_1 - v_3 = \phi(v_2 - 2v_4).$$

In caso affermativo, si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ e si determinino delle basi per nucleo e immagine di ϕ.

(b) Si determinino dei sistemi di equazioni cartesiane per nucleo e immagine di ϕ. Si dica se $V = \ker\phi \oplus \operatorname{im}\phi$ e, in caso affermativo, si scriva la matrice, nella base $\mathcal{V}$, della proiezione su $\ker\phi$ parallelamente a $\operatorname{im}\phi$.

(c) Si consideri l'insieme $\mathscr{D} = \{\, \psi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, V) \mid \phi \circ \psi \circ \phi = 0 \,\}$. Si dica se $\mathscr{D}$ è un sottospazio di $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, V)$ e se ne calcoli la dimensione. Sia $\mathscr{D}' = \{\, \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\psi) \mid \psi \in \mathscr{D} \,\} \subseteq M_4(\mathbb{Q})$. Si dica come trovare un sistema (minimale) di equazioni cartesiane per $\langle \mathscr{D}' \rangle$.

Svolgimento. (a) I vettori $v_1 + 2v_3$, $2v_1 - v_3$, $2v_2 + v_4$, $v_2 - 2v_4$ sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di V. Quindi esiste un'unica applicazione lineare $\phi : V \to V$ soddisfacente alle condizioni date. La matrice cercata è

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 9/5 & 0 & -3/5 \\ 3/5 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & -3/5 & 0 & 1/5 \\ -9/5 & 0 & -3/5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\ker\phi = \langle v_1 - 3v_3, v_2 + 3v_4 \rangle$, e $\operatorname{im}\phi = \langle v_2 - 3v_4, 3v_1 - v_3 \rangle$.

(b) Due sistemi di equazioni cartesiane sono

$$\operatorname{im}\phi : \begin{cases} 3X_2 + X_4 = 0 \\ X_1 + 3X_3 = 0 \end{cases}, \qquad \ker\phi : \begin{cases} 3X_2 - X_4 = 0 \\ 3X_1 + X_3 = 0 \end{cases}.$$

Si verifica facilmente (come?) che $\ker\phi \cap \operatorname{im}\phi = \langle 0 \rangle$, e quindi $V = \ker\phi \oplus \operatorname{im}\phi$. La matrice della proiezione $\pi : V \to V$ su $\ker\phi$, parallelamente a $\operatorname{im}\phi$ è

$$B = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi) = \begin{pmatrix} -1/8 & 0 & -3/8 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/6 \\ 3/8 & 0 & 9/8 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(c) $\mathscr{D}$ è un sottospazio e $\psi \in \mathscr{D}$ se, e solo se, $\psi(\operatorname{im}\phi) \subseteq \ker\phi$. Dunque ψ manda i vettori deel sottospazio $\operatorname{im}\phi$ nel sottospazio $\ker\phi$, ed i vettori del complementare $\ker\phi$ in V. Dunque

$$\mathscr{D} \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(\operatorname{im}\phi, \ker\phi) \oplus \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(\ker\phi, V)$$

(come è fatta questa somma diretta? scegliere una base opportuna per descriverla in termini di matrici) e quindi $\dim \mathscr{D} = 12$.

L'insieme $\mathscr{D}' = \langle \mathscr{D}' \rangle$ (è un sottospazio) e una matrice $X \in M_4(\mathbb{Q})$ appartiene a $\mathscr{D}'$ se, e solo se, soddisfa alle condizioni

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che forniscono un sistema di equazioni cartesiane nelle entrate della matrice X. □

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 30 novembre 2012 – Compito **B**

ESERCIZIO 1. Si consideri il polinomio $P(X) = X^4 + 4 \in \mathbb{C}[X]$.

(a) Si determinino (in forma algebrica) le radici in $\mathbb{C}$ del polinomio $P(X)$ e le si disegni nel piano di Gauss.

(b) Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati del quadrato, Q, avente come vertici le radici di $P(X)$ e si scrivano tali equazioni in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(c) Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del quadrato Q nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione $\lambda_*(I) \cap I$ ove si indichino con I i punti interni o sul bordo del quadrato Q.

ESERCIZIO 2. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una sua base (ordinata).

(a) Dire se esiste un'applicazione lineare $\phi : V \to V$ tale che

$$\phi(2v_2 + v_4) = v_1 - 3v_3 = \phi(2v_4 - v_2), \qquad \text{e} \qquad \phi(2v_1 + v_3) = 3v_4 - v_2 = \phi(v_1 - 2v_3).$$

In caso affermativo, si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ e si determinino delle basi per nucleo e immagine di ϕ.

(b) Si determinino dei sistemi di equazioni cartesiane per nucleo e immagine di ϕ. Si dica se $V = \ker\phi \oplus \operatorname{im}\phi$ e, in caso affermativo, si scriva la matrice, nella base $\mathcal{V}$, della proiezione su $\ker\phi$ parallelamente a $\operatorname{im}\phi$.

(c) Si consideri l'insieme $\mathscr{D} = \{\, \psi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, V) \mid \phi \circ \psi \circ \phi = 0 \,\}$. Si dica se $\mathscr{D}$ è un sottospazio di $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, V)$ e se ne calcoli la dimensione. Sia $\mathscr{D}' = \{\, \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\psi) \mid \psi \in \mathscr{D} \,\} \subseteq M_4(\mathbb{Q})$. Si dica come trovare un sistema (minimale) di equazioni cartesiane per $\langle \mathscr{D}' \rangle$.