Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 5 settembre 2013

ESERCIZIO 1. *[9 punti] Sia $\phi : \mathbb{Q}^7 \to \mathbb{Q}^7$ l'endomorfismo di matrice* $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *rispetto alla base canonica.*

(a) Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autovalori e spazi di autovettori per ϕ.
(b) Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.
(c) Siano dati due interi n e $k \geq 1$ e si consideri la matrice di ordine $2k+1$ del tipo

$$B_{n,k} = \begin{pmatrix} n{+}k & 0 & & & & & 0 & -k \\ 0 & \ddots & & & & & \iddots & \frac{1}{k} \\ & & n{+}1 & 0 & -1 & \iddots & & 0 \\ & & 0 & n & 1 & & & \\ & & 1 & 0 & n{-}1 & & & \\ & \iddots & & & & & \ddots & 0 \\ k & 0 & & & & & 0 & n{-}k \end{pmatrix} \in M_{2k+1}(\mathbb{Q})$$

Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}B_{n,k}P$.

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X-2)^7$ e quindi c'è solo l'autovalore 2, con molteplicità (algebrica) 7. I relativi autovettori generano il sottospazio $\ker(\phi - 2) = \langle e_4 \rangle$. Si ha quindi un solo blocco di Jordan per l'autovalore 2, necessariamente di ordine 7; dunque il polinomio minimo è $\lambda_\phi(X) = p_\phi(X) = (X-2)^7$.

(b) Osservando che

$$A - 2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

si vede che, preso il vettore $v_7 = e_1$, si ha

$$v_6 = (\phi-2)(v_7) = 3e_1 + 3e_7, \quad v_5 = (\phi-2)(v_6) = e_2, \quad v_4 = (\phi-2)(v_5) = 2e_2 + 2e_6,$$
$$v_3 = (\phi-2)(v_4) = e_3, \quad v_2 = (\phi-2)(v_3) = e_3 + e_5, \quad v_1 = (\phi-2)(v_2) = e_4.$$

Dunque, e_1 è un autovettore generalizzato di periodo 7 per l'autovalore 2 e abbiamo ottenuto una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_7\}$ rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan. Possiamo quindi scrivere le matrici

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2&1&0&0&0&0&0 \\ 0&2&1&0&0&0&0 \\ 0&0&2&1&0&0&0 \\ 0&0&0&2&1&0&0 \\ 0&0&0&0&2&1&0 \\ 0&0&0&0&0&2&1 \\ 0&0&0&0&0&0&2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&3&1 \\ 0&0&0&2&1&0&0 \\ 0&1&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&2&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&3&0 \end{pmatrix}.$$

(c) Si ha $B_{n,k} = n\mathbf{1} + B_{0,k}$ quindi è suffciente studiare il caso di $B_{0,k}$, matrice nilpotente di ordine $2k+1$. Quindi la forma di Jordan di $B_{n,k}$ ha un unico blocco di ordine massimo relativo all'autovalore n; e una matrice di cambiamento di base si può costruire in modo analogo a partire dall'autovettore generalizzato e_1.
□

ESERCIZIO 2. *[11 punti] In $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ munito del sistema di riferimento $\mathscr{R} = \{O, e_1, \dots, e_4\}$ si considerino le sottovarietà lineari:*

$$r_\alpha : \begin{cases} \alpha x_2 + x_3 = \alpha \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \alpha^2 - 1 \\ x_3 + \alpha x_4 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

(a) Determinare la posizione reciproca di r_α e s al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e eventuali punti di intersezione.
(b) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste almeno una retta passante per l'origine O e complanare a r_α e s e per tali valori determinarle tutte.
(c) Posto $\alpha = 1$ determinare, se esiste, (scrivendone la matrice in un opportuno sistema di riferimento) un'affinità $f : \mathbb{A}^4(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ tale che f abbia un unico punto unito, $f(r) = s$ e $f(s) = r$.

Svolgimento. (a) Guardando al rango dei sistemi lineari, si vede che s è una retta, così come le sottovarietà r_α, per $\alpha \neq 0$. r_0 è un piano. La posizione reciproca delle sottovarietà è determinata dai ranghi del sistema lineare di matrice completa

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&-1 \\ 1&1&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 1&1&1&1&\alpha^2-1 \\ 0&\alpha&1&0&\alpha \\ 0&0&1&\alpha&0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&-1 \\ 0&1&1&0&1 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&\alpha^2-1 \\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right).$$

le righe della matrice a destra sono legate alle righe della matrice di sinistra dalle relazioni $I, II - I, VI - \alpha III, III, IV - II - III, V - \alpha(II - I) + (\alpha - 1)(VI - \alpha III)$. I ranghi sono $(4, 5)$ per $\alpha^2 \neq 1$ e le due varietà sono sghembe, mentre per $\alpha \in \{-1, 1\}$, le due varietà si intersecano nel punto $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Perché esista una retta per l'origine complanare con r_α e s è necessario (e sufficiente) che r_α, s e O stiano in uno stesso spazio affine tridimensionale. Ciò accade certamente se $\alpha^2 = 1$, perché le due rette appartengono a uno stesso piano, non passante per O, e quindi, in tal caso, solo la retta $O \vee P$ è complanare con entrambe.

Se $\alpha^2 \neq 1$, possiamo già escludere il caso $\alpha = 0$, perché il piano r_0 non contiene l'origine. Negli altri casi

$$r_\alpha \vee s = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} \alpha^2-1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha-2 \\ 1 \\ -\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

non contiene l'origine.

(c) Per $\alpha = 1$, si ha $r_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $s = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$. Posto

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

L'insieme $\mathscr{R} = \{P, v_1, \dots, v_4\}$ è un riferimento affine in $\mathbb{A}^4$ e l'affinità di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&0&-1&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&2&0 \\ 0&0&0&0&3 \end{pmatrix}$$

in tale riferimento soddisfa alle condizioni poste. □

ESERCIZIO 3. *[10 punti] Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ munito del sistema di riferimento $\mathscr{R} = (O, \{e_1, e_2, e_3\})$ si consideri la retta*

$$t : \begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

(a) Si scrivano le matrici nel riferimento canonico delle isometrie che si ottengono ruotando attorno alla retta t di angolo $\theta = \pi/3$.

(b) Si scriva la matrice nel riferimento canonico della riflessione σ_π di asse il piano $\pi : x - y = 1$ e si descrivano tutte le sue sottovarietà lineari unite.

(c) Si classifichino secondo Eulero le isometrie ottenute componendo le rotazioni al punto precedente seguite dalla riflessione σ_π.

Svolgimento. (a) Il riferimento $\mathcal{R} = \{O', v_1, v_2, v_3\}$, ove

$$O' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

è un riferimento ortonormale che ha la retta t come terzo asse coordinato. È immediato scrivere le matrici delle due rotazioni in questo riferimento e componendole con le matrici di cambiamento di riferimento si ottengono le matrici

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

(b) La matrice cercata è

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le sottovarietà lineari unite rispetto alla riflessione sono, oltre al piano π, piano di punti uniti, le rette e i piani ortogonali a π (un piano si dice ortogonale a π se è parallelo al vettore normale a π).

(c) La composizione di una rotazione seguita da una riflessione ha determinante -1 (Teorema di Binet). Inoltre, il piano di riflessione contiene l'asse di rotazione che è quindi costituito da punti uniti per la trasformazione composta. Questo è possibile solo se la trasformazione composta è una riflessione; i piani di riflessione si ottengono ruotando π attorno a t di $\pi/6$ (farsi un disegno della trasformazione indotta su un piano ortogonale a t). □