Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 9 luglio 2013

ESERCIZIO 1. [8 punti] *Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice* $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ *rispetto alla base canonica.*

(a) Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X+1)^5$ e quindi vi è solo l'autovalore -1, con molteplicità (algebrica) 5. Il relativo autospazio è $\ker(\phi + 1) = \langle e_1 + e_3, e_2 - e_3 - 2e_4 - e_5 \rangle$, di dimensione 2. Il polinomio minimo è $\lambda_\phi(X) = (X+1)^4$, perché si ha

$$A + 1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (A+1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A+1)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A+1)^4 = \mathbf{0}_5.$$

(b) La matrice di Jordan di ϕ ha due blocchi relativi all'autovalore -1, uno di ordine 4 e l'altro di ordine 1. Il vettore $v_5 = e_5$ è un autovettore generalizzato di periodo 4 per l'autovalore -1 e si pone $v_4 = (\phi+1)(v_5) = 2e_2 - 2e_5$, $v_3 = (\phi+1)(v_4) = 2e_1 + 6e_3$, $v_2 = (\phi+1)(v_3) = 4e_1 + 4e_3$. Infine, si pone $v_1 = e_2 - e_3 - 2e_4 - e_5$ e si ottiene così una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan. Le matrici cercate sono, ad esempio,

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 6 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fine della discussione. □

ESERCIZIO 2. [12 punti] *In $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ munito del sistema di riferimento $\mathscr{R} = \{O, e_1, \dots, e_4\}$ si considerino i piani*

$$\pi_\alpha : \begin{cases} \alpha x_1 + x_2 - x_3 = \alpha \\ x_2 = 0 \end{cases} \qquad \sigma_\beta : \begin{cases} x_3 - \beta x_4 = 0 \\ x_1 + \beta x_2 = 0 \end{cases}.$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare la posizione reciproca dei due piani π_α e σ_β al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e calcolare la dimensione di $\pi_\alpha \vee \sigma_\beta$.

(b) Posto $\alpha = 1, \beta = 0$ e $P \notin \pi_\alpha \cup \sigma_\beta$. Esiste un piano τ_P, passante per P, e tale che $\dim(\pi_1 \vee \tau_P) = 3 = \dim(\sigma_0 \vee \tau_P)$? È unico?

(c) Esiste un'affinità $f : \mathbb{A}^4(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ tale che $f(\pi_1) = \sigma_0$ e $f(\sigma_0) = \pi_1$?

Svolgimento. (a) L'intersezione tra i due piani è governata dal sistema lineare di matrice completa

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\beta & 0 \\ \alpha & 1 & -1 & 0 & \alpha \end{array}\right) \underset{(IV - \alpha I + \beta II + III)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{array}\right).$$

- Se $\beta \neq 0$, matrice completa ed incompleta hanno rango 4, i due piani si incontrano in un punto e $\dim(\pi_\alpha \vee \sigma_\beta) = 4$ (cf. formula di Grassmann affine).

- Se, invece $\beta = 0 \neq \alpha$, i due piani hanno intersezione vuota, ma il sottospazio $\langle e_4 \rangle$ è comune ai due spazi direttori e $\dim(\pi_\alpha \vee \sigma_\beta) = 4$.
- Infine, se $\beta = 0 = \alpha$, i due piani si intersecano nella retta $O + \langle e_4 \rangle$ e $\dim(\pi_\alpha \vee \sigma_\beta) = 3$.

(*b*) Si ha $\pi_1 = (O + e_1) + \langle e_1 + e_3, e_4 \rangle$ e $\sigma_0 = O + \langle e_2, e_4 \rangle$. Il punto P non appartiene a $\pi_1 \cup \sigma_0$, quindi, se esiste un piano τ_P con le proprietà richieste, deve aversi $\tau_P \vee \pi_1 = P \vee \pi_1$ e $\tau_P \vee \sigma_0 = P \vee \sigma_0$; ove le due sottovarietà sono distinte ed hanno dimensione 3. Quindi (sempre per la formula di Grassmann affine) deve essere $\tau_P = (P \vee \pi_1) \cap (P \vee \sigma_0)$ ed il piano così determinato è unico.

(*c*) Fissiamo un sistema di riferimento che abbia come origine il punto $M = O + \frac{1}{2}e_1$, e i vettori $v_1 = e_1$, $v_2 = e_2$, $v_3 = e_1 + e_3$, $v_4 = e_4$. L'affinità di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nel riferimento testé descritto è quella cercata. □

ESERCIZIO 3. [12 punti]

(*a*) *Sia $f : \mathbb{E}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{E}^n(\mathbb{R})$ una rigidità. Supponiamo che esista una retta r in $\mathbb{E}^n(\mathbb{R})$ su cui f induca una traslazione. Dimostrare che allora f non ha punti uniti.*

(*b*) *Sia $f : \mathbb{E}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{E}^n(\mathbb{R})$ una rigidità che non ha punti uniti. Dimostrare che allora esiste una retta r in $\mathbb{E}^n(\mathbb{R})$ su cui f induce una traslazione.*

(*c*) *Sia $g : \mathbb{A}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ un'affinità per cui esista una retta r sulla quale g induce una traslazione. È vero che allora g non ha punti uniti?*

Svolgimento. (a) Sia $f : \mathbb{E}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{E}^n(\mathbb{R})$ una rigidità e supponiamo che essa induca una traslazione $\tau_v = f_{|r} : r \to r$ di vettore $0_{\mathbb{R}^n} \neq v \in \mathbb{R}^n$ sulla retta r passante per P e parallela a v. Consideriamo un sistema di riferimento ortonormale di $\mathbb{E}^n(\mathbb{R})$ $\mathscr{S} = \{P, u_1, \dots, u_n\}$ con $u_1 = \frac{v}{\|v\|}$. Allora la matrice associata a f rispetto al sistema di riferimento S è (in forma a blocchi):

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & {}^t0_{\mathbb{R}^{n-1}} \\ \|v\| & 1 & {}^t0_{\mathbb{R}^{n-1}} \\ 0_{\mathbb{R}^{n-1}} & 0_{\mathbb{R}^{n-1}} & H \end{pmatrix}$$

con $H \in O_{n-1}(\mathbb{R})$ matrice ortogonale (perché u_1 è autovettore di autovalore 1 e l'applicazione lineare ϕ soggiacente a f è un'isometria). Quindi f non ha punti uniti perché il sistema lineare

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & {}^t0_{\mathbb{R}^{n-1}} \\ 0_{\mathbb{R}^{n-1}} & H \end{pmatrix} - \mathbb{I}_n \right) \underline{x} = \begin{pmatrix} -\|v\| \\ 0_{\mathbb{R}^{n-1}} \end{pmatrix}$$

con $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ non ha soluzioni.

(*b*) Sia f una una rigidità la cui matrice associata rispetto al sistema di riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O, e_1 \dots, e_n\}$ sia

$$L = \begin{pmatrix} 1 & {}^t0_{\mathbb{R}^n} \\ v & A \end{pmatrix}.$$

Allora f non ha punti uniti se e solo se il sistema lineare $(A - \mathbb{I}_n)x = -v$ non ha soluzione. Quindi $rg(A - \mathbb{I}_n) < n$ perciò 1 è autovalore di A.

Supponiamo che l'autovalore 1 abbia molteplicità algebrica k allora esiste un sistema di riferimento ortonormale $\mathscr{R}' = \{Q, u_1, \dots, u_n\}$ ove $u_1, \dots, u_k$ sono autovettori di autovalore 1 (perché ϕ è un'isometria quindi è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$). In tale riferimento la matrice associata a f risulta

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & {}^t0_{\mathbb{R}^{n-r}} \\ v & \mathbb{I}_r & \mathbb{O}_{n-r} \\ 0_{\mathbb{R}^{n-r}} & \mathbb{O}_{n-r} & K \end{pmatrix}$$

con $v \in \mathbb{R}^r$ e $K \in O_{n-r}(\mathbb{R})$. Quindi la retta passante per Q e parallela a v è unita e f induce una traslazione su r.

(c) No, non è vero. Ad esempio l'affinità $g : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ la cui matrice nel sistema di riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O, e_1, e_2\}$ è

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha una retta di punti uniti di equazione cartesiana $y = -1$ e g induce sull'asse $y = 0$ una traslazione. $\square$