Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 14 Giugno 2013

ESERCIZIO 1. *Nello spazio euclideo* $\mathbb{E}^3$ *nel riferimento canonico* $\mathscr{R} = \{O, e_1, e_2, e_3\}$ *si considerino la retta* $r : \begin{cases} y = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$ *e la retta* $s : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 4t \\ z = -1 - t \end{cases}$

(a) *Si determinino i punti di minima distanza* R *in* r *e* S *in* s *e la distanza fra le due rette. Si determinino inoltre il coseno dell'angolo* θ *formato dalle rette* r *e* s *e le equazioni cartesiane di* t *proiezione ortogonale della retta* s *nel piano* $\pi : x + z = 1$.

(b) *Sia* ρ *l'isometria la cui matrice rispetto al riferimento canonico è:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -1 & 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Determinare $\rho(r)$ *immagine della retta* r. *Sia* σ *la riflessione (simmetria ortogonale) di asse* π; *classificare secondo Eulero l'isometria* $\varrho := \sigma \circ \rho$ *e determinarne tutte le sottovarietà unite.*

(c) *Descrivere (scrivendone la matrice in un opportuno sistema di riferimento) quali sono tutte le possibili isometrie* τ *di* $\mathbb{E}^3$ *tali che la retta passante per i punti di minima distanza* R *e* S *sia unita e* $\tau(r) = t$.

Svolgimento. (a) Le rette r e s sono sghembe i punti di minima distanza sono $R = O + e_1 + e_2$ in r e $S = O + e_2 - e_3$ in s quindi la distanza fra r e s è $d(r, s) = \sqrt{2}$. La proiezione ortogonale della retta s nel piano π è la retta $t : \begin{cases} x + z = 1 \\ y + 4z = 1 \end{cases}$. Il coseno dell'angolo formato da r e s è $\cos\theta = \frac{1}{3}$.

(b) L'isometria ρ è una rotazione di asse $h : R + \langle e_1 + e_3 \rangle$ angolo θ. La riflessione richiesta ha matrice:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La rigidità $\sigma \circ \rho$ è una roto-riflessione in quanto è stata costruita come composizione di una rotazione seguita da una simmetria ortogonale che ha come asse il piano π, ortogonale all'asse di rotazione di ρ.

L'unico punto unito è l'intersezione dell'asse di rotazione di ρ con il piano π cioè il punto R. L'unica retta unita è h, l'asse di rotazione di ρ. L'unico piano unito è il piano π.

(c) Il punto R è unito, perché $\tau(R) \in (R \vee S) \cap t = \{R\}$. Lo spazio direttore della retta $h = R \vee S$ è un autospazio (relativo all'autovalore ± 1) per τ (o, meglio, per l'applicazione lineare associata a τ). Un versore della retta r deve andare in un versore della retta t. Si consideri il sistema di riferimento che ha l'origine in R, e la base ortonormale v_1, v_2, v_3, ove v_1 è un versore di r e v_3 è un versore di h e $\cos\theta v_1 + \sin\theta v_2$ è un versore della retta t. In questo sistema di riferimento, le possibili isometrie hanno matrici.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm\cos\theta & \mp\sin\theta & 0 \\ 0 & \pm\sin\theta & \pm\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

e sono quindi possibili le varie scelte di segno per le colonne (8 casi). □

ESERCIZIO 2. *In* $\mathbb{E}^4$ *nel riferimento canonico* $\mathscr{R} = \{O, e_1, \dots, e_4\}$ *si consideri l'iperpiano* $\mathbb{T} : x_1 + x_2 = 0$ *e la retta* $l = O + e_1 + \langle e_1 - e_2 \rangle$.

(a) Determinare la posizione reciproca di $\mathbb{T}$ *e* l *e la loro distanza.*

(b) Determinare un sistema di riferimento ortonormale tale che il piano $\mathbb{T}$ *abbia equazione* $X_1 = 0$.

(c) Descrivere tutte le sottovarietà lineari di $\mathbb{E}^4$ *che contengono* l *e non intersecano* $\mathbb{T}$.

Svolgimento. (a) La retta l è parallela all'iperpiano $\mathbb{T}$; la sua distanza da $\mathbb{T}$ è la distanza del punto $O + e_1$ da $\mathbb{T}$, ovvero $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(b) Il piano $\mathbb{T}$ passa per l'origine, quindi possiamo prendere la nuova origine sempre in O e prendere la base ortonormale, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, con $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$ (ortogonale a $\mathbb{T}$) e $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2)$, $v_3 = e_3$, $v_4 = e_4$.

(c) Le sottovarietà lineari di $\mathbb{E}^4$ che contengono l e non intersecano $\mathbb{T}$ sono, la retta l, di equaziono cartesiane $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$; l'iperpiano $\mathbb{T}' : x_1 + x_2 = 1$, parallelo a $\mathbb{T}$ e contenente l, e il fascio di piani per l, paralleli a $\mathbb{T}$, ovvero i piani $\pi_{(a,b)} = O + e_1 + \langle e_1 - e_2, ae_3 + be_4 \rangle$, al variare dei parametri omogenei (a, b). Le equazioni cartesiane dei piani sono $\pi_{(a,b)} : \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ bx_3 - ax_4 = 0 \end{cases}$. □