Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 17 settembre 2013

ESERCIZIO 1. *[9 punti] Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

(a) Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

(c) Si scrivano le matrici di Jordan complesse di una rototraslazione e di una glissoriflessione dello spazio euclideo tridimensionale (pensate come endomorfismi di $\mathbb{C}^4$).

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X-2)^3(X+1)^2$ e quindi vi sono gli autovalori 2 e -1, con molteplicità (algebrica) 3 e 2, rispettivamente. I relativi autovettori generano i sottospazi $\ker(\phi - 2) = \langle e_3, e_2 + 2e_5\rangle$ e $\ker(\phi + 1) = \langle e_2 - e_5\rangle$. Il polinomio minimo è quindi $\lambda_\phi(X) = p_\phi(X) = (X - 2)^2(X + 1)^2$ perché in entrambo i casi gli autovettori generalizzati hanno periodo minore o uguale a 2.

(b) Osservando che

$$A - 2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad (A-2)^2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ -4 & 6 & 0 & -4 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

si vede che, il vettore $v_5 = 2e_1 + 2e_2 + e_4$ appartiene a $\ker(\phi - 2)^2 \setminus \ker(\phi - 2)$. Quindi prendiamo $v_4 = (\phi-2)(v_5) = e_3$ e $v_3 = e_2+2e_5$ che completano una base di autovettori generalizzati relativi all'autovalore 2. Inoltre, $\operatorname{im}(\phi - 2)^2 \subseteq \ker(\phi + 1)^2$ e i due sottospazi coincidono per motivi di dimensione. Quindi possiamo prendere $v_2 = 3e_1 - 2e_3 + 6e_4 \in \operatorname{im}(\phi - 2)^2 = \ker(\phi + 1)^2$ e $v_1 = (\phi + 1)(v_2) = 6e_2 - 6e_5$. In questo modo abbiamo una base, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$, rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan e possiamo quindi scrivere

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Sono le matrici

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ciò perché l'applicazione lineare associata all'isometria è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ (teorema spettrale per endomorfismi normali), e vi è una traslazione non banale (parallela alle direzioni unite). Nello spazio affine e euclideo siamo abituati a usare le trasposte per l'obbligo di distinguere i punti dai vettori. □

ESERCIZIO 2. *[11 punti] In $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ munito del sistema di riferimento $\mathscr{R} = \{O, e_1, \dots, e_4\}$ si considerino le sottovarietà lineari:*

$$\pi_k : O + e_1 + e_3 + e_4 + \langle ke_1 + e_2 + ke_4, ke_2 + e_3 + e_4\rangle \qquad \sigma : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_4 = 1 \end{cases}.$$

(a) Determinare la posizione reciproca delle sottovarietà lineari π_k e σ al variare di $k \in \mathbb{R}$ e eventuali punti di intersezione.

(b) Si consideri la retta $r = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t+2 \\ 1-t \\ -t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$. Posto $k = 0$ è possibile definire la proiezione della retta r sulla sottovarietà lineare σ, parallelamente allo spazio direttore di π_0? Se sì, calcolarla. Posto $k = -1$ è

possibile definire la proiezione della retta r sulla sottovarietà lineare σ parallela allo spazio direttore di π_{-1}? Se sì, calcolarla.

(c) *Determinare, se esiste, (scrivendone la matrice in un opportuno sistema di riferimento) un'affinità $f : \mathbb{A}^4(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ tale che $f(\pi_{-1}) = \sigma$ e $f(\sigma) = \pi_{-1}$.*
Esiste una tale affinità che non abbia punti uniti?

Svolgimento. (a) Sostituiamo nelle equazioni di σ la rappresentazione parametrica di un punto $O + e_1 + e_3 + e_4 + \alpha(ke_1 + e_2 + ke_4) + \beta(ke_2 + e_3 + e_4)$ di π_k, e otteniamo il sistema $\begin{cases} \beta = -1 \\ (k+1)\alpha = k-1 \end{cases}$, che ammette un'unica soluzione se $k \neq -1$, che definisce un unico punto di intersezione (le cui coordinate si ricavano dalla rappresentazione parametrica dei punti di π_k).

Per $k = -1$ non ci sono punti di intersezione e guardando ai sottospazi direttori, si trova la direzione $\langle e_1 - e_2 + e_4 \rangle$ comune ai due piani.

(b) Si ha $r = P + \langle v \rangle$, con $P = O + 2e_2 + e_3$ e $v = e_1 + e_2 - e_3 - e_4$. Il sottospazio direttore di π_0 è $W_0 = \langle e_2, e_3 + e_4 \rangle$. Per trovare la proiezione della retta r, dobbiamo quindi aggiungere alle equazioni di σ, l'equazione dell'iperpiano $P + \langle v \rangle + W_0$, ovvero $X_3 - X_4 = 1$. Il sottospazio direttore di π_{-1} è $W_{-1} = \langle e_1 - e_2 + e_4, e_2 - e_3 - e_4 \rangle$; ma, questa volta, il sottospazio direttore di σ non è in somma diretta con W_{-1} e quindi *non esiste* la proiezione su σ parallelamente a W_{-1}[(†)]

(c) Il vettore $v_1 = e_1 - e_2 + e_4$ è comune ai due sottospazi direttori. Siano poi $P_0 = O + e_1 + e_3 + e_4$, $Q_0 = O - e_4$, $v_2 = e_2 - e_3 - e_4$, $v_3 = e_2 + e_3$, e $v_4 = Q_0 - P_0$, di modo che, $\pi_{-1} = P_0 + \langle v_1, v_2 \rangle$ e $\sigma = Q_0 + \langle v_1, v_3 \rangle$. Possiamo considerare l'affinità che, nel riferimento $\{P_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$, ha matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

e osservare che scambia le due varietà senza lasciare punti fissi. □

ESERCIZIO 3. *[10 punti] Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ munito del sistema di riferimento $\mathscr{R} = (O, \{e_1, e_2, e_3\})$ si considerino le rette*

$$r : \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

(a) *Determinare la distanza fra r e s, i punti di minima distanza $R \in r$ e $S \in s$ e il coseno dell'angolo fra le due rette r e s.*

(b) *Determinare le equazioni cartesiane dell'unica retta t parallela al vettore $v = e_1 + e_2$ e intersecante sia r che s.*

(c) *Detti $P = t \cap r$ e $Q = t \cap s$ calcolare il volume del tetraedro di vertici R, S, P, Q.*

Svolgimento. (a) Siano $P_0 = O + e_1 + 3e_3$, $u = e_1 - e_2$, $Q_0 = O - e_3$, $w = 2e_1 - e_2 - e_3$, così che $r = P_0 + \langle u \rangle$ e $s = Q_0 + \langle w \rangle$. Il generico vettore differenza tra i punti delle due rette, $(P_0 + tu) - (Q_0 + sw)$, è ortogonale a entrambo le rette se, e solo se, $t = -4$ e $s = -7/3$. Per cui i punti di minima distanza sono $R = O - 3e_1 + 4e_2 + 3e_3$, e $S = O - \frac{14}{3}e_1 + \frac{7}{3}e_2 + \frac{4}{3}e_3$; e la distanza tra le due rette è $\frac{5}{\sqrt{3}}$. Il coseno dell'angolo tra le due rette è $\frac{|u \cdot w|}{\|u\| \|w\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(b) Il generico punto $P_0 + tu + sv$ appartiene alla retta s se, e solo se, $s = -\frac{5}{2}$ e $t = -\frac{13}{2}$. Quindi la retta cercata è $t = P_0 - \frac{13}{2}u + \langle v \rangle$, di equazioni cartesiane $t : \begin{cases} x - y = -12 \\ z = 3 \end{cases}$.

(c) I punti sono $P = O - \frac{11}{2}e_1 + \frac{13}{2}e_2 + 3e_3$ e $Q = O - 8e_1 + 4e_2 + 3e_3$. Il volume cercato è quindi uguale a $\frac{1}{6}\left|\frac{D(S-R, P-R, Q-R)}{D(e_1, e_2, e_3)}\right| = \frac{125}{36}$. □

(†) Se avessimo proceduto analogamente al caso precedente avremmo trovato comunque un iperpiano ($X_2 + X_4 = 2$) che interseca σ in una retta. Di che retta si tratta?