Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 18 giugno 2013

ESERCIZIO 1. *Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.*

(a) [4 punti] Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) [4 punti] Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

(c) [2 punti] Si scriva la matrice A come somma di una matrice diagonalizzabile, D, e di una nilpotente, N.

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X-1)^2(X-5)^3$ e quindi vi sono gli autovalori 1 e 5, con molteplicità (algebrica) 2 e 3, rispettivamente. I relativi autovettori generano i sottospazi di dimensione 1, $\ker(\phi-1) = \langle 3e_1 - e_3 \rangle$ e $\ker(\phi-5) = \langle e_1 + e_3 \rangle$. Il polinomio minimo è $\lambda_\phi(X) = p_\phi(X) = (X-1)^2(X-5)^3$ e si ha

$$A - 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (A-1)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 12 & -8 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 8 \\ 4 & 2 & 12 & -8 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 16 & 6 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad A - 5 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(*b*) La matrice di Jordan di ϕ ha un solo blocco, di ordine 3, relativo all'autovalore 5 e un solo blocco, di ordine 2, relativo all'autovalore 1. Il vettore $v_2 = 4e_1 + 4e_2 + e_4 - 4e_5$ è un autovettore generalizzato di periodo 2 per l'autovalore 1 e si pone $v_1 = (\phi-1)(v_2) = 3e_1 - e_3$. Il vettore $v_5 = 4e_2 + e_3 + 4e_5$, appartiene a $\operatorname{im}(\phi-1)^2 = \ker(\phi-5)^3$ [perché?], ed è un autovettore generalizzato di periodo 3 per l'autovalore 5. Si pone $v_4 = (\phi-5)(v_5) = 3e_1 + 3e_3 + 4e_4$ e $v_3 = (\phi-5)^2(v_5) = -4e_1 - 4e_3$. Si ottiene così una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan. Le matrici cercate sono, ad esempio,

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(*c*) Scrivendo $J = \Delta + S$, ove Δ è la parte diagonale e S quella nilpotente, basta porre,

$$D = P\Delta P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -7/8 & 3 & 0 & 1/8 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -3/8 & 4 & 0 & 5/8 \\ 0 & -1/2 & 0 & 5 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad N = PSP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 7/8 & 0 & -1 & -1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/8 & 0 & -1 & 3/8 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che sono le matrici cercate. □

ESERCIZIO 2. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di dimensione 8 e $\phi : V \to V$ un endomorfismo di rango 5, con polinomio minimo $\lambda_\phi(X) = X^2(X-1)^2$.*

(a) [5 punti] Si determinino tutte le possibili forme di Jordan per la matrice di ϕ, non simili tra loro. È sufficiente conoscere il polinomio caratteristico di ϕ per distinguerle?

(b) [5 punti] In ogni caso, si consideri la decomposizione $V = \ker\phi^2 \oplus \ker(\phi-1)^2$. È vero che esistono due polinomi $g(X)$ e $h(X)$ in $\mathbb{C}[X]$ tali che $h(\phi)$ sia la proiezione su $\ker\phi^2$ e $g(\phi)$ sia la proiezione su $\ker(\phi-1)^2$ associate a questa decomposizione di V? In caso affermativo si determinino tali polionomi e si dica se dipendono o meno dalla forma di Jordan di ϕ

Svolgimento. (a) Le possibili matrici di Jordan sono 4, corrispondenti alle filtrazioni dei nuclei descritte nella seguente tabella,

$\dim\ker\phi$	$\dim\ker\phi^2$	$\dim\ker(\phi-1)$	$\dim\ker(\phi-1)^2$
3	6	1	2
3	5	2	3
3	4	2	4
3	4	3	4

da cui si vede che le ultime due righe corrispondono a due forme di Jordan, non simili, aventi lo stesso polinomio caratteristico $X^4(X-1)^4$.

(b) Con un facile calcolo di massimo comun divisore, $1 = X^2(3-2X) + (X-1)^2(2X+1)$ e, ricordando la dimostrazione del Lemma di Decomposizione, per ogni vettore $v \in V$, si ha $v = \phi^2(3-2\phi)(v) + (\phi-1)^2(2\phi+1)(v)$, con il primo addendo in $\ker(\phi-1)^2$ ed il secondo in $\ker\phi^2$. Posto quindi $g(X) = (X-1)^2(2X+1)$ e $h(X) = X^2(3-2X)$, si hanno i polinomi cercati. □

ESERCIZIO 3. *Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$, dotato del riferimento canonico $\{O, e_1, e_2, e_3\}$, si considerino la retta $r = O + e_1 + \langle e_2 \rangle$ ed il piano di equazione $\pi : x - z = 0$.*

(a) [5 punti] Si determinino le posizioni reciproche e la distanza della retta e del piano dall'origine, O. Si determinino i punti delle due sottovarietà lineari a minima distanza da O.

(b) [5 punti] Si determini la matrice nel riferimento canonico di una glissoriflessione, $f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$, tale che $f(O) = O + e_1 + e_2 + e_3$, $f(r) = r$ e $f(\pi) = \pi$.

Svolgimento. (a) La retta r è parallela ed esterna al piano π. Ha distanza 1 dall'origine e il punto $O + e_1$ è il punto di minima distanza. Il piano π passa per l'origine ed ha quindi distanza 0 da O che è il punto di minima distanza.

(b) Le rette unite in una glissoriflessione sono tutte e sole le rette del piano di riflessione, parallele alla direzione di traslazione. Oltre al piano di riflessione, sono uniti tutti i piani paralleli alla direzione di riflessione (autospazio relativo all'autovalore -1 per l'applicazione lineare associata) e alla direzione di traslazione. La retta r e il piano π sono disgiunti e quindi la direzione di traslazione è parallela al vettore e_2 e il piano di riflessione contiene la retta r ed è parallelo al sottospazio $\langle e_1 - e_3 \rangle$, ortogonale al piano π. Si tratta della riflessione rispetto al piano $\tau = O + e_1 + \langle e_1 - e_3, e_2 \rangle$, seguita dalla traslazione di vettore e_2; e quindi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è la matrice cercata. □