Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 19 aprile 2013 – Compito **A**

ESERCIZIO 1. *Sia* $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ *l'endomorfismo di matrice* $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *rispetto alla base canonica.*

(a) [4 punti] *Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo autovalori e spazi di autovettori per* ϕ.

(b) [4 punti] *Si determinino una matrice di Jordan,* J*, ed una matrice invertibile,* P*, tali che* $J = P^{-1}AP$.

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X-2)^5$ e quindi vi è il solo autovalore 2, con molteplicità (algebrica) 5. Gli autovettori generano il sottospazio $\ker(\phi - 2) = \langle e_1 - e_3, e_1 + e_4 \rangle$. Si ha

$$A - 2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad (A-2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A-2)^3 = \mathbf{0};$$

e il polinomio minimo è $\lambda_\phi(X) = (X-2)^3$.

(b) La matrice di Jordan ha quindi un blocco di ordine 3 ed uno di ordine 2. Il vettore $v_5 = e_2$ è un autovettore generalizzato di periodo 3. Posto $v_4 = (\phi-2)(v_5) = 3e_2 + e_3 + e_4 - 3e_5$, $v_3 = (\phi-2)^2(v_5) = -3e_1 + 6e_3 + 3e_4$ e, $v_2 = e_1$, $v_1 = (\phi - 2)(v_2) = e_1 + e_4$, si ottiene una base, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$, rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan. Le matrici cercate sono quindi

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Fine della discussione. □

ESERCIZIO 2. *Sia* V *uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo* C.

(a) [4 punti] *Sia dia l'esempio di un endomorfismo* $\phi : V \to V$ *per cui* $V = \ker\phi \oplus \operatorname{im}\phi$ *e di un endomorfismo per cui ciò non sia vero.*

(b) [4 punti] *È vero che per ogni endomorfismo* $\phi : V \to V$ *esiste un intero positivo* m *tale che* $V = \ker\phi^m \oplus \operatorname{im}\phi^m$*?*

Svolgimento. (a) Sia $V = U \oplus W$ e $\pi : V \to V$ la proiezione su U parallelamente a W. È ben noto che $U = \operatorname{im}\pi$, $W = \ker\pi$ e $V = U \oplus W$. D'altro canto, sia $\nu : V \to V$ un endomorfismo nilpotente di periodo 2 ($\nu \neq 0 = \nu^2$). In tal caso $\langle 0 \rangle \neq \operatorname{im}\nu \subseteq \ker\nu \neq V$; quindi $\operatorname{im}\nu + \ker\nu = \ker\nu \neq V$ e la somma non è diretta.

(b) È chiaro che se ϕ è invertibile, la tesi è vera con $m = 1$, essendo $\ker\phi = \langle 0 \rangle$ e $\operatorname{im}\phi = V$. Supponiamo quindi che vi sia un nucleo non banale, ovvero che X divida il polinomio caratteristico $p_\phi(X)$. Allora il polinomio minimo di ϕ è $\lambda_\phi(X) = X^m g(X)$ con $m \geq 1$ e $g(0) \neq 0$. Per il Lemma di Decomposizione, si ha $V = \ker\phi^m \oplus \ker g(\phi)$. Dal fatto che $g(\phi) \circ \phi^m = \lambda_\phi(\phi) = 0$, si deduce che $\operatorname{im}\phi^m \subseteq \ker g(\phi)$ e i due spazi coincidono per motivi di dimensione (oppure perché ϕ induce un automorfismo nel sottospazio $\ker g(\phi)$ [come convincersi di ciò?]). □

ESERCIZIO 3. *Nello spazio affine* $\mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$*, col riferimento canonico* $\mathscr{R} = \{O, e_1, e_2, e_3\}$*, si considerino la retta* $r : \begin{cases} X_1 + X_3 = 1 \\ 2X_2 - X_3 = 6 \end{cases}$ *e il piano* $\pi : X_2 - X_3 = 0$.

(a) [4 punti] *Detto* W *il sottospazio direttore di* π*, si scriva la matrice nel riferimento canonico della simmetria,* $\sigma : \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3$*, di asse* r *e direzioni* W.

(b) [6 punti] *Date due rette sghembe s_1, s_2 in $\mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$, si trovino una retta r e un sottospazio W tali che la simmetria di asse r e direzioni W scambi tra loro le due rette. Quali sono le scelte possibili per la retta r ed il sottospazio W? Si determinino una retta r e un sottospazio W nel caso in cui $s_1 = O+e_1+e_3+\langle e_2\rangle$ e $s_2 = O + e_1 + \langle e_1 + e_2 + e_3\rangle$.*

Svolgimento. (a) Il simmetrico tramite σ di un punto X è determinato dalle condizioni $\sigma(X) - X \in W$ e $\frac{\sigma(X)+X}{2} \in r$. Dunque, usando le coordinate nel riferimento canonico,

$$\sigma(X) = \begin{pmatrix} x_1+\alpha \\ x_2+\beta \\ x_3+\beta \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} (x_1 + \frac{\alpha}{2}) + (x_3 + \frac{\beta}{2}) = 1 \\ 2(x_2 + \frac{\beta}{2}) - (x_3 + \frac{\beta}{2}) = 6 \end{cases}.$$

Se ne deduce che $\sigma(X) = \begin{pmatrix} -10-x_1+4x_2-4x_3 \\ 12-3x_2+2x_3 \\ 12-4x_2+3x_3 \end{pmatrix}$ e quindi la matrice di σ nel riferimento canonico è

$$\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & -1 & 4 & -4 \\ 12 & 0 & -3 & 2 \\ 12 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

(*b*) Presi i punti $P_1 \neq Q_1$ in s_1 e $P_2 \neq Q_2$ in s_2, i quattro punti sono in posizione generale in $\mathbb{A}^3$ e quindi generano tutto lo spazio. Esiste quindi un'unica proiettività $f : \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3$ che manda ordinatamente P_1, Q_1, P_2, Q_2 su P_2, Q_2, P_1, Q_1. Si tratta chiaramente di una simmetria ($f^2 = \mathrm{id}$); che lascia uniti i punti medi $\frac{P_1+P_2}{2}$ e $\frac{Q_1+Q_2}{2}$, e quindi la retta da essi generata (perché i due punti non possono coincidere?) è tutta costituita da punti uniti per f. I vettori $P_2 - P_1$ e $Q_2 - Q_1$ sono linearmente indipendenti (perché?) e vengono mandati nei loro opposti dall'applicazione lineare associata ad f. Si tratta quindi della simmetria rispetto alla retta $r = \frac{P_1+P_2}{2} \vee \frac{Q_1+Q_2}{2}$ e di direzioni $W = \langle P_2 - P_1,\, Q_2 - Q_1\rangle$.

I punti medi di tutte le coppie di punti (X_1, X_2) con $X_1 \in s_1$ e $X_2 \in s_2$, formano un piano (il piano $\frac{P_1+P_2}{2} + \langle Q_1 - P_1, Q_2 - P_2\rangle$, nelle notazioni precedenti) ed ogni punto di questo piano è il punto medio di un'unica coppia di punti sulle due rette sghembe. Per quanto visto, tutte le rette di questo piano sono possibili assi di simmetria. La scelta di due punti $M = \frac{P_1+P_2}{2}$ ed $N = \frac{Q_1+Q_2}{2}$ su una delle rette del piano determina due coppie distinte $P_1, Q_1 \in s_1$ e $P_2, Q_2 \in s_2$ ed i vettori P_2-P_1 e Q_2-Q_1 generano il sottospazio W delle direzioni di simmetria (il sottospazio W dipende dalla scelta dei punti?).

Nel caso in cui $s_1 = O+e_1+e_3+\langle e_2\rangle$ e $s_2 = O+e_1+\langle e_1 + e_2 + e_3\rangle$, possiamo prendere $P_1 = O+e_1+e_3$, $Q_1 = O+e_1+e_2+e_3$, e $P_2 = O+e_1$, $Q_2 = O+2e_1+e_2+e_3$. Quindi $r = (O+e_1+\frac{1}{2}e_3)\vee(O+\frac{3}{2}e_1+e_2+e_3)$ e $W = \langle e_3\rangle\, e_1$ (ovvero $r : \begin{cases} 2x - y = 2 \\ y - 2z = -1 \end{cases}$ e $W : y = 0$). □

ESERCIZIO 4. [4 punti] *Sia $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ un'affinità tale che, per ogni retta r, l'immagine $f(r)$ sia parallela ad r. È vero che f è un'omotetia o una traslazione?*

Svolgimento. L'immagine della retta $P + \langle v\rangle$ è la retta $f(P) + \langle\phi(v)\rangle$, ove ϕ è l'applicazione lineare associata ad f. Le due rette sono parallele se, e solo se, $\langle v\rangle = \langle\phi(v)\rangle$; ovvero se, e solo se, v è autovettore per ϕ. Dunque ogni retta è parallela alla propria immagine se, e solo se, ogni vettore non nullo è autovettore per ϕ, necessariamente relativo ad un unico autovalore. Se l'autovalore è 1 si ha una traslazione, altrimenti un'omotetia. □

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)
prova scritta del 19 aprile 2013

Nome	Cognome	N. Matricola

B

ESERCIZIO 1. Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

(a) [4 punti] Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) [4 punti] Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

ESERCIZIO 2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C.

(a) [4 punti] Sia dia l'esempio di un endomorfismo $\phi : V \to V$ per cui $V = \ker\phi \oplus \operatorname{im}\phi$ e di un endomorfismo per cui ciò non sia vero.

(b) [4 punti] È vero che per ogni endomorfismo $\phi : V \to V$ esiste un intero positivo m tale che $V = \ker\phi^m \oplus \operatorname{im}\phi^m$?

ESERCIZIO 3. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$, col riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O, e_1, e_2, e_3\}$, si considerino la retta $r : \begin{cases} X_1 + X_3 = 1 \\ 2X_2 - X_3 = 6 \end{cases}$ e il piano $\pi : X_2 - X_3 = 0$.

(a) [4 punti] Detto W il sottospazio direttore di π, si scriva la matrice nel riferimento canonico della simmetria, $\sigma : \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3$, di asse r e direzioni W.

(b) [6 punti] Date due rette sghembe s_1, s_2 in $\mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$, si trovino una retta r e un sottospazio W tali che la simmetria di asse r e direzioni W scambi tra loro le due rette. Quali sono le scelte possibili per la retta r ed il sottospazio W? Si determinino una retta r e un sottospazio W nel caso in cui $s_1 = O + e_1 + e_3 + \langle e_2 \rangle$ e $s_2 = O + e_1 + \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle$.

ESERCIZIO 4. [4 punti] Sia $(\mathbb{A}, V, +)$ uno spazio affine di dimensione maggiore di 1 e sia $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ un'affinità associata all'applicazione lineare $\phi : V \to V$. È vero che se la retta $r = P + \langle v \rangle$ è unita ($f(r) \subseteq r$), allora v è autovettore per ϕ? È vero che, se $v \neq 0$ è autovettore per ϕ, esiste una retta unita parallela a $\langle v \rangle$?

NON SCRIVERE NELLO SPAZIO SOTTOSTANTE

1	2	3	4

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 19 aprile 2013

Nome	Cognome	N. Matricola

C

ESERCIZIO 1. Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

(a) [4 punti] Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) [4 punti] Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

ESERCIZIO 2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C.

(a) [4 punti] Sia dia l'esempio di un endomorfismo $\phi : V \to V$ per cui $V = \ker\phi \oplus \operatorname{im}\phi$ e di un endomorfismo per cui ciò non sia vero.

(b) [4 punti] È vero che per ogni endomorfismo $\phi : V \to V$ esiste un intero positivo m tale che $V = \ker\phi^m \oplus \operatorname{im}\phi^m$?

ESERCIZIO 3. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$, col riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O, e_1, e_2, e_3\}$, si considerino la retta $r : \begin{cases} X_1 + X_2 = 1 \\ X_2 - 2X_3 = -6 \end{cases}$ e il piano $\pi : X_2 - X_3 = 0$.

(a) [4 punti] Detto W il sottospazio direttore di π, si scriva la matrice nel riferimento canonico della simmetria, $\sigma : \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3$, di asse r e direzioni W.

(b) [6 punti] Date due rette sghembe s_1, s_2 in $\mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$, si trovino una retta r e un sottospazio W tali che la simmetria di asse r e direzioni W scambi tra loro le due rette. Quali sono le scelte possibili per la retta r ed il sottospazio W? Si determinino una retta r e un sottospazio W nel caso in cui $s_1 = O + e_1 + e_2 + \langle e_3 \rangle$ e $s_2 = O + e_1 + \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle$.

ESERCIZIO 4. [4 punti] Sia $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ un'affinità. È vero che se f commuta con una traslazione $\tau_v \neq \mathrm{id}$, allora tutte le rette parallele a $\langle v \rangle$ sono unite? È vero che se tutte le rette parallele a $\langle v \rangle \neq \langle 0 \rangle$ sono unite, allora f commuta con la traslazione τ_v?

NON SCRIVERE NELLO SPAZIO SOTTOSTANTE

1	2	3	4