Esercizio 1. Calcolare z^{-1}, w^{-1}, zw, zw^{-1}, $z^{-1}w$, z^2, z^3, z^4, le radici quadrate di z e le radici cubiche di z per le seguenti coppie di numeri:

(a) $z = 1 - i$, $w = 2 + i$;

(b) $z = 1 + i$, $w = 1 - 2i$;

(c) $z = 3e^{i\pi/3}$, $w = 2e^{i\pi/4}$

(d) $z = \cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}$, $w = -i$

(e) $z = \cos\theta + i\sin\theta$, $w = \pm 2i$

Esercizio 2. Verificare le seguenti relazioni:

$$\frac{1+i}{1-i} = i, \qquad (1-2i)^4 = (2+i)^4, \qquad z + \bar{z} = 2\Re z, \qquad i\bar{z} - iz = 2\Im z, \qquad \frac{z}{\bar{z}} = e^{2i\operatorname{Arg} z}.$$

Esercizio 3. Si studino le proprietà di iniettività, suriettività, eventuali inverse destre e sinistre per le seguenti funzioni $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

(a) $f_1(z) = iz^2 + 1$;

(b) $f_2(z) = (z - 2i)^2$;

(c) $f_3(z) = z - \bar{z}$;

(d) $f_4(z) = |z|/z$ se $z \neq 0$, $f_4(0) = 0$.

(e) $f_5(z) = \bar{z}/z$ se $z \neq 0$, $f_5(0) = 1$.

Per ogni $w \in \mathbb{C}$, si determini la sua controimmagine per ciascuna delle funzioni date.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un'applicazione affine. È vero che se f assume lo stesso valore su due punti distinti allora assume lo stesso valore su tutti i punti? È vero che esiste un'applicazione affine $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tale che $f(1+i) = 1+i$ e $f(1-i) = 3-i$? In caso affermativo, si determini la scrittura esplicita di f.

Esercizio 5. Siano z_1 e z_2 le radici del polinomio $P(X) = X^2 + iX + 1 \in \mathbb{C}[X]$. Si determinino modulo e argomento del numero complesso $(z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2)^3$.

Esercizio 6. Sia ζ una soluzione dell'equazione $X^k - 1 = 0$. Si mostri che $1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{k-1} = 0$.

Esercizio 7. Scrivere (e disegnare sul piano di Gauss) le radici n-esime di $1 - i$, $2 - 2i$, $3 - 4i$ per $n = 2, 3, 4, 5, 6$.

Esercizio 8. Determinare $\cos(5t)$, $\cos(8t)$, $\sin(6t)$, $\sin(9t)$ in termini delle funzioni trigonometriche di argomento t (e loro potenze).

Esercizio 9. Sia $w = 1 + i\sqrt{3}$. Determinare $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tali che $0, w, z_1, z_2$ formino un quadrato nel piano di Gauss e $\Re(z_1) < 0$. Mostrare che $(w + z_2)(w - z_2) = 2w^2$ e $2wz_2 = z_1^2$.

Esercizio 10. Si determinino gli elementi degli insiemi

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z^3 - 2i = 0 \right\}, \qquad B = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z^3 + 2 = 0 \right\},$$

(a) Si disegnino sul piano di Gauss gli insiemi A, B e $C = \{ z \in \mathbb{C} \mid \Re z > 0 < \Im z \}$.

(b) Siano $\{\zeta_1\} = A \cap C$ e $\{\zeta_2\} = B \cap C$. È vero che $(\zeta_1 + \zeta_2)(\zeta_1 - \zeta_2)$ è un numero reale e $\frac{\zeta_1+\zeta_2}{\zeta_1-\zeta_2}$ è un numero immaginario? (calcolarli)

(c) Nel piano di Gauss, si disegni il parallelogramma di vertici 0, ζ_1, ζ_2, $\zeta_1 + \zeta_2$.

(d) Si dia una condizione necessaria e sufficiente sui numeri complessi $z_1 \neq z_2$, affinché $\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$ sia un numero immaginario.

Esercizio 11. Calcolare perimetro ed area del poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza unitaria.

Esercizio 12. Calcolare perimetro ed area del poligono regolare di n lati circoscritto alla circonferenza unitaria.

Esercizio 13. Si consideri l'insieme I dei numeri complessi del tipo $m + in$ al variare di m ed n tra i numeri interi (i indica l'unità immaginaria). Si determini una retta passante per il punto $z_0 = 1 + 2i$ del piano di Argand-Gauss che intersechi l'insieme I nel solo punto z_0.

Esercizio 14. Rappresentare nel piano di Gauss tutti i logaritmi complessi di e e di ie. Per un qualsiasi $z = \varrho e^{i\theta}$ disegnare nel piano di Gauss la famiglia dei suoi logaritmi.

Esercizio 15. Si disegnino nel piano di Argand-Gauss i sottoinsiemi

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid \Im(i(z+1)^2) < 1 \right\}, \qquad \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \Re(i(z-2)^2) > 2 \right\},$$
$$\left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \left|\frac{z-i}{z+2}\right| < 1 \right\}, \quad \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \left|\frac{2z-i}{z+2}\right| \le \sqrt{3} \right\}, \quad \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \left|\frac{z-2}{\bar{z}+2i}\right| \le \sqrt{2} \right\}.$$

Esercizio 16. Nel piano complesso si considerino il semipiano superiore $\mathfrak{H} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z > 0 \}$ e la trasformazione $z \mapsto u = \frac{z-i}{z+i}$

(a) Si mostri che l'applicazione $z \mapsto u$ trasforma il semipiano $\mathfrak{H}$ nel disco $D = \{ u \in \mathbb{C} \mid |u| < 1 \}$.

(b) Si determini il punto z_0 che viene inviato da questa trasformazione nel centro del disco e si dia una formula esplicita per la trasformazione inversa.

(c) Si scrivano le relazioni tra l'immagine dell'asse reale $\{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z = 0 \}$ ed il bordo del disco D.

Esercizio 17. Si determinino i numeri complessi z, soddisfacenti alla condizione $z^2 - 3z + 3 + i = 0$.

Esercizio 18. Si determinino i numeri complessi z, soddisfacenti alla condizione $z^2+(i-1)z+6+2i = 0$.

Esercizio 19. Si determinino i numeri complessi z, soddisfacenti alla condizione $z^3 - (1+i)z^2 + (1+4i)z - 1 - 3i = 0$. (Si osservi che $z-1$ divide il polinomio dato.)

Esercizio 20 (Formula di Cardano)**.** Si consideri l'equazione generale di terzo grado, della forma $aX^3 + bX^2 + cX + d = 0$, con $a \neq 0$.

(a) Si verifichi che, posto $X = Y - \frac{b}{3a}$, si ottiene $aX^3 + bX^2 + cX + d = a(Y^3 + pY + q)$, con $p = \frac{3ac-b^2}{3a^2}$ e $q = \frac{27a^2d+2b^3-9abc}{27a^3}$.

(b) Si mostri che la *sostituzione di Viète*, $Y = W - \frac{p}{3W}$, porta l'equazione $Y^3 + pY + q = 0$ nella forma $W^3 - \frac{p^3}{27W^3} + q = 0$. Infine, la moltiplicazione per W^3 e la posizione $W^3 = T$, riporta il problema alla risoluzione dell'equazione di secondo grado $T^2 + qT - \frac{p^3}{27} = 0$ ed all'estrazione delle radici terze delle soluzioni.

(c) Si osservi che, se w_1 è una soluzione dell'equazione $W^3 - \frac{p^3}{27W^3} + q = 0$, allora anche $w_2 = -\frac{p}{3w_1}$ è una soluzione della stessa equazione e che $w_1 - \frac{p}{3w_1} = w_2 - \frac{p}{3w_2}$. Si concluda che dai 6 possibili valori per le radici di $W^3 - \frac{p^3}{27W^3} + q = 0$, si ottengono al più tre valori distinti per le radici di $Y^3 + pY + q = 0$.

Esercizio 21 (Formule di Ferrari e Del Ferro)**.** Si consideri l'equazione generale di quarto grado, della forma $aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e = 0$, con $a \neq 0$.

(a) Si verifichi che, posto $X = Y - \frac{b}{4a}$, si ottiene $aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e = a(Y^4 + pY^2 + qY + r)$, per opportuni valori di p, q ed r.

(b) Si mostri che, introducendo una variabile ausiliaria, U, si ha

$$Y^4 + pY^2 + qY + r = \left(Y^2 + \tfrac{U}{2}\right)^2 - \left[(U-p)Y^2 - qY + (\tfrac{U^2}{4} - r)\right].$$

(c) Si osservi che, se u è una radice dell'equazione $q^2 - (U-p)(U^2 - 4r) = 0$, sostituendo u ad U nel termine di destra dell'identità nel punto precedente, si ottiene la differenza tra i quadrati di due polinomi nella Y, che è uguale al prodotto di due polinomi di secondo grado nella Y.

(d) Si concluda che il metodo precedente riconduce la risoluzione di un'equazione di quarto grado alla risoluzione di equazioni di terzo e secondo grado.

Esercizio 22. Si utilizzino i procedimenti descritti negli esercizi precedenti per trovare le radici dei seguenti polinomi

$$X^3 + 3iX - (1+i), \qquad X^3 + \frac{3(1+i)}{\sqrt{2}}X^2 + (\sqrt{2}-1)(1+i), \qquad X^4 + 2iX^2 - (1-2i)X + 2i.$$