Esercizio 1. Si determinino le soluzioni dell'equazione $z^2 - (1+3i)z - 4 + 3i = 0$.

(a) Si disegnino nel piano di Gauss le soluzioni, z_1 e z_2, dell'equazione.

(b) Si determinino $\alpha \in \mathbb{C}$ e $c \in \mathbb{R}$ tali che la retta $r : \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + c = 0$ passi per z_1 e z_2.

(c) Si determinino centro e raggio della circonferenza del piano di Gauss che si ottiene per riflessione della retta r rispetto alla circonferenza unitaria ($|z| = 1$).

Esercizio 2. Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il sottoinsieme

$$D_\alpha = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \left| \frac{z - 2 - i}{\bar{z} + 2 - i} \right| < \alpha \right\}.$$

Si dica per quali valori di α il sottoinsieme non è vuoto e si descriva in tal caso D_α. Si disegnino (se esistono) i sottoinsiemi D_α per $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$. Si abbozzi un disegno dei sottoinsiemi D_α al variare di α.

Esercizio 3. Nel piano di Gauss si consideri la retta r formata dai numeri complessi z tali che r : $(2-i)z + (2+i)\bar{z} - 4 = 0$ e si verifichi che $z_0 = 1$ e $z_1 = 2i$ appartengono alla retta.

(a) Si determinino una traslazione τ ed una rotazione ρ, tali che l'applicazione composta $f = \tau^{-1}\rho^{-1}\sigma\rho\tau$ sia la riflessione rispetto alla retta r, ove $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ indica il coniugio. Si scriva l'espressione analitica di f.

(b) Si determini l'equazione in termini di z e $\bar{z}$ della retta $f_*(h)$, ove h è l'asse reale ($\Im z = 0$).

(c) Si determini l'equazione della circonferenza, $\lambda^*(r)$, che si ottiene riflettendo la retta r nella circonferenza unitaria.

(d) Si determini l'espressione analitica della riflessione nella circonferenza $\lambda^*(r)$.

Esercizio 4. Si consideri la funzione di variabile complessa $f(z) = \dfrac{z\sqrt{3} - 1}{z + \sqrt{3}}$.

(a) Si determini il dominio D della funzione f, si trovi, se esiste, un sottoinsieme di D su cui f induce una biiezione e si scriva l'espressione della funzione inversa.

(b) Si determinino, se esistono, i punti uniti della funzione f.

(c) Si determini l'insieme dei punti di D per cui $|f(z)| > 2$ e lo si rappresenti nel piano di Gauss.

(d) Si determinino le funzioni $f^2 = f \circ f$ ed $f^3 = f \circ f \circ f$. È vero che, dati $n, m \in \mathbb{N}$, si ha $f^n(z) = f^m(z)$ per ogni z se, e solo se, $n \equiv m \mod 6$?

Esercizio 5. Il semipiano di Poincaré è definito da $P = \{z \in \mathbb{C} |\ \Im(z) > 0\}$ (numeri complessi la cui parte immaginaria è positiva). Il disco unità è $D = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 1\}$ (numeri complessi di modulo strettamente inferiore a 1). Mostrare che la funzione $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ è una biiezione $P \to D$.

Determinare l'immagine della semicirconferenza di centro origine e raggio 1; e della semiretta verticale passante per l'origine.

Mostrare che i tratti di circonferenze di centro il punto $-i$ sono mandati in tratti di circonferenze di centro il punto 1.

Esercizio 6. Siano a, b, c, d numeri reali tali che $ad - bc = 1$. Consideriamo la funzione (detta trasformazione lineare fratta) $s \colon P \to P$ (P è il semipiano di Poincaré) data da $s(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

Mostrare che $\Im(s(z)) = \frac{\Im(z)}{|cz+d|^2}$, cosicché in effetti s è definita da P a P.

Mostrare che s può essere scritta come composizione di funzione dei seguenti tre tipi: traslazione reale ($z \mapsto z + u$ con $u \in \mathbb{R}$), omotetie reali ($z \mapsto vz$ con $v \in \mathbb{R}$, $v > 0$), controinversioni ($z \mapsto -\frac{1}{z}$).

Descrivere le figure formate da $s(z)$ se z descrive le semicirconferenze con centro sull'asse reale, oppure le semirette ortogonali all'asse reale.

Esercizio 7. Si consideri il polinomio $P(X) = X^3 - 2iX^2 - 2X \in \mathbb{C}[X]$.

(a) Si determinino le radici del polinomio $P(X)$ e le si disegni nel piano di Gauss.

(b) Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati del triangolo, D, avente come vertici le radici di $P(X)$ e si scrivano tali equazioni in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(c) Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del triangolo D nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione $D \cap \lambda^*(D)$, ove $\lambda : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ è la riflessione nel cerchio unitario.

Esercizio 8. Determinare quali $z \in \mathbb{C}$ soddisfano la disuguaglianza $|z| \leq |z+1|$.

Esercizio 9. Siano $a = 5 + i9$ e $b = 3 - i4$ e si consideri la funzione di variabile complessa $f(z) = \dfrac{z-a}{bz-1}$.

(a) Si determini il dominio D della funzione f, si trovi, se esiste, un sottoinsieme di D su cui f induce una biiezione e si scriva l'espressione della funzione inversa.

(b) Si determinino, se esistono, i punti uniti della funzione f.

(c) Si determini l'insieme dei punti di D per cui $|f(z)| > 2$ e lo si rappresenti nel piano di Gauss.

(d) Si determini il sottoinsieme Q formato dai punti z tali che $(bz-1)^4 = 1$ e si disegnino nel piano di Gauss i sottoinsiemi $f_*(Q)$ ed $f^*(Q)$.

(e) Si determinino le soluzioni, z_1, z_2, z_3, dell'equazione $z^3 + 2 - 2i$ e si disegnino sul piano di Gauss i tre punti corrispondenti ed i loro coniugati. Scrivere un'equazione che abbia come soluzioni tutti e soli i punti z_1, z_2, z_3, $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$, $\bar{z}_3$.

(f) Sia $n = 12$. Indicate con $1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{n-1}$ le soluzioni dell'equazione $z^n - 1 = 0$, si scrivano tutti gli esponenti j per cui $\{\zeta^{kj} |\ k = 1, \dots, n\} = \{\zeta^k |\ k = 1, \dots, n\}$.

Esercizio 10. Siano $z_1 = -3 + i4$ e $z_2 = 2 - i5$ due numeri complessi.

(a) Calcolare i numeri complessi z_1/z_2 e z_2/z_1 e disegnarli nel piano di Gauss.

(b) Si consideri la funzione $\phi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da $\phi(z) = z^2 + iz_1 z - 12i$. Determinare se è iniettiva e/o suriettiva. Descrivere la controimmagine di 0. Esistono $w \in \mathbb{C}$ tali che la loro controimmagine contenga un solo elemento?

Esercizio 11. Si consideri l'insieme $\mathscr{C} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} - (2-i)z - (2+i)\bar{z} + 1 = 0 \,\}$.

(a) Si verifichi che $\mathscr{C}$ è un cerchio del piano di Gauss e se ne determinino centro e raggio.

(b) Data la funzione $f(z) = \dfrac{z}{z-i}$ e si determinino i sottoinsiemi $f^*(\mathscr{C})$ e $f_*(\mathscr{C})$ dando delle equazioni soddisfatte dai loro elementi.

(c) Si dica quale tra gli insiemi $f^*(\mathscr{C})$ e $f_*(\mathscr{C})$ è una retta oppure un cerchio e si disegnino nel piano di Gauss i sottoinsiemi $\mathscr{C}$, $f^*(\mathscr{C})$ e $f_*(\mathscr{C})$.

Esercizio 12. Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{3z+i}{z+i}.$$

(a) Si determinino il dominio e l'immagine di f e si determini la sua funzione inversa.

(b) Si disegnino i sottoinsiemi H e $D = f_*(H)$, ove $H = \{\, z \in \mathbb{C} \mid i(z - \bar{z}) < 0 \,\}$.

(c) Si considerino le trasformazioni $g(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ed $ad - bc = 1$, e si mostri che per ogni tale g si ha $g_*(H) = H = g^*(H)$. Data $g(z) = z+1$, sia h la trasformazione composta $h = f \circ g \circ f^{-1}$. Si determini $h_*(D)$.

Esercizio 13. Sia $z \in \mathbb{C}$.

(a) Si disegni il sottoinsieme, D, del piano di Gauss definito dalle condizioni

$$D : \begin{cases} |z + \bar{z}| \leq 1 \\ z\bar{z} \geq 1 \end{cases} .$$

(b) Si consideri la funzione $f(z) = -\frac{1}{z+1}$. Si determinino i domini, D_f, di f e D_g, della sua inversa, g, e si scriva esplicitamente la funzione $g(z)$. Si determini l'insieme $D_f \cap D_g \cap D$.

(c) Si determini e si disegni nel piano di Gauss il sottoinsieme $f_*(D)$.