Esercizio 1. Dati i seguenti sottoinsiemi S_i di $\mathbb{R}^2$ dire quali di essi sono sottospazi.

$$S_1 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) \right\}, \quad S_2 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0 \right\}, \quad S_3 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 2 \right\},$$
$$S_4 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0 \right\}, \quad S_5 = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \mid v \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = 1 \right\}.$$

Esercizio 2. Dati i seguenti sottoinsiemi S_i di $\mathbb{C}^3$ dire quali di essi sono sottospazi.

$$S_1 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right\}, \quad S_2 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^3 \mid x + y = 2 \right\}, \quad S_3 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^3 \mid x - 2y + z = 0 \right\},$$
$$S_4 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^3 \mid x^2 - y^2 = 0 \right\}, \quad S_5 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^3 \mid x^2 - y^2 - z^2 = 4 \right\}.$$

Esercizio 3. Verificare che i vettori $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ generano $\mathbb{C}^2$ ed estrarne tutte le basi possibili.

Esercizio 4. Verificare che i vettori $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ generano $\mathbb{Q}^3$ ed estrarne tutte le basi possibili.

Esercizio 5. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori $u = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $v = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $w = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dimostrare che ogni vettore $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$ si scrive in modo unico come combinazione $x = au + bv + cw$ e determinare a, b, c nei seguenti casi: $x = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $x = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $x = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.

Esercizio 6. Trovare le equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio di $\mathbb{R}^2$ generato dal vettore $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.

Esercizio 7. Trovare le equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio di $\mathbb{C}^3$ generato dal vettore $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1+i \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Idem per il sottospazio $\left\langle \left(\begin{smallmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$.

Esercizio 8. Dato il sottospazio $\left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$ di $\mathbb{Q}^3$, dire quali dei seguenti sottospazi sono ad esso complementari: $\langle 0 \rangle$, $\mathbb{Q}^3$, $\left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$, $\left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$, $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Q}^3 \mid x - y + z = 0 \right\}$.

Esercizio 9. Verificare che i $u = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $w = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ sono linearmente indipendenti e descrivere tramite equazioni il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da tali vettori. Completare l'insieme $\{u, v, w\}$ ad una base di $\mathbb{R}^4$.

Dato il sottospazio $U = \langle u, v, w \rangle$ si determini un sottospazio W_0 tale che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W_0$. È possibile determinare *tutti* i sottospazi, W, tali che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$, tramite i generatori di U e W_0?

Esercizio 10. Verificare che i sottinsiemi di $\mathbb{R}^4$ formati dai vettori $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right)$ soddisfacenti alle condizioni $x_1 + x_4 = 0 = x_3 - x_2$ (sia U) e $x_3 + 2x_4 = 0 = 2x_1 - x_2$ (sia V) sono sottospazi vettoriali, trovarne la dimensione evidenziando delle basi. Calcolare poi una base di $U \cap V$ e le equazioni del più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ contenente sia U che V.

Esercizio 11. Sia $V = K[X]_{\leq 5}$ lo spazio vettoriale su K dei polinomi di grado minore o uguale a 5.

(a) Si calcoli la dimensione di V su K.

(b) Esistono basi di V i cui elementi abbiamo tutti lo stesso grado?

(c) Esistono basi di V i cui elementi abbiano tutti il termine lineare aX nullo?

Esercizio 12. Sia $V = K[X]_{\leq 4}$ lo spazio vettoriale su K dei polinomi di grado minore o uguale a 4. Si consideri il sottoinsieme U che contiene il polinomio nullo e tutti i polinomi di grado dispari. U è un sottospazio? Si descriva una base di $\langle U \rangle$.

Esercizio 13. Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 5}$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ dei polinomi di grado minore o uguale a 5. Si consideri il sottoinsieme U formato dai polinomi $P(X)$ tali che $P(1) = P(-1) = 0$. U è un sottospazio? In caso affermativo si descriva una base di U. Sempre in caso affermativo si determini un sottospazio W tale che $V = U \oplus W$ (ne esistono più di uno? come determinarli tutti?)

Esercizio 14. Si consideri la semiretta $(0, +\infty) \subset \mathbb{R}$, e si verifichi che tale insieme ha una struttura di spazio vettoriale reale, ove si prenda come 'somma' di due vettori $x, y \in (0, +\infty)$ il loro prodotto in quanto numeri reali e come 'moltiplicazione' del vettore $x \in (0, +\infty)$ per lo scalare $c \in \mathbb{R}$ il numero reale x^c.

Esercizio 15. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ consideriamo i vettori $u = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ e $w = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) verificare che sono linearmente indipendenti e risolvere in α, β, γ la relazione $x = \alpha u + \beta v + \gamma w$ per un vettore $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$ generico;

(b) disegnare e caratterizzare (tramite equazioni o disequazioni) i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ formati dagli estremi finali dei vettori del tipo $\alpha u + \beta v + \gamma w$ ove α, β e γ sono numeri reali soggetti alle seguenti condizioni:

(C) $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \infty)$

(Pi) $\alpha + \beta + \gamma = 1$

(Tr) $\alpha + \beta + \gamma = 1$ con $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$

(Pa) $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$

(Te) $\alpha + \beta + \gamma \leq 1$ con $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$

(X) $\alpha + \beta + \gamma \leq 1$.

(c) specificare le relazioni di inclusione tra gli insiemi precedenti.

Esercizio 16. Sia $V = K[X]_{\leq 4}$ lo spazio vettoriale su K dei polinomi di grado minore o uguale a 4. Siano $P(X) = 1 + X^2 - X^4$, $Q(X) = X + X^2 - X^3 + 2X^4$. Si calcolino le loro coordinate rispetto alla base canonica. Si calcolino le equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio $U = \langle P(X), Q(X) \rangle$, si calcoli la dimensione di U e si fornisca un sottospazio di V complementare ad U.

Esercizio 17. Si considerino i vettori $u = e_1 - 3e_3, v = -2e_2 + e_3, w = 2e_1 + e_2 + e_3, t = e_1 + e_3$ di $\mathbb{R}^3$.

(a) Si dimostri che i quattro vettori sono linearmente dipendenti fornendo una loro combinazione lineare nulla non banale.

(b) Si considerino i sottospazi $U = \langle u, v \rangle$ e $W = \langle w, t \rangle$. Si determinino delle basi di $U \cap W$ e $U + W$. è vero che $U + W = U \oplus W$?

(c) Si dica a quali dei sottospazi $U, W, U \cap W, U + W$ appartiene il vettore $v' = 2e_1 - 3e_2 + e_3$ e si scriva una base di tali sottospazi contenente il vettore v'.

(d) Si scrivano tutte le basi di $\mathbb{R}^3$ contenute nell'insieme $\{u, v', v, w, t\}$.

Esercizio 18. Sia V uno spazio vettoriale sul campo C. Si dimostri che

(a) Un vettore v è linearmente indipendente se, e solo se, $v \neq 0$.

(b) Due vettori v, w sono linearmente indipendenti se, e solo se, non sono proporzionali.

(c) I vettori $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti se, e solo se, nessuno di questi appartiene al sottospazio generato dai precedenti, ovvero se, e solo se, $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \langle v_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_k \rangle$.

Esercizio 19. Si considerino i sottospazi

$$U = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle, \quad W = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$$

di $\mathbb{Q}^4$. Determinare una base di $U+W$ e si dica se la somma è diretta. Si determinino equazioni cartesiane per U, W, $U + W$ ed $U \cap W$.

Esercizio 20. Dati i sottospazi

$$U = \langle e_1 + e_4, 2e_1 + e_2 + 2e_4 + 2e_5, e_2 + e_4 \rangle, \quad W = \langle 2e_1 + e_2, e_4, 2e_1 + e_2 - 4e_4 + e_5 \rangle$$

di $\mathbb{Q}^5$ determinare $U \cap W$ e $U + W$, loro dimensioni ed equazioni.