Esercizio 1. Siano P_0, P_1, P_2 tre punti allineati nello spazio affine $\mathbb{A}$ su un campo C, e sia $P_0 \neq P_1$. Si definisce il *rapporto semplice* tra i tre punti (nell'ordine) come lo scalare

$$[P_0, P_1, P_2] = \frac{P_2 - P_0}{P_1 - P_0} = c \in C$$

ovvero, lo scalare c tale che $P_2 = P_0 + c(P_1 - P_0) = (1-c)P_0 + cP_1$, cioè la coordinata affine del punto P_2 nel riferimento sulla retta $P_0 \vee P_1$ che ha P_0 come origine e $P_1 - P_0$ come vettore di base dello spazio direttore della retta.

(a) Siano P_0, P_1, P_2 allineati e a due a due distinti. Si verifichi che

$$[P_0, P_1, P_2] = c, \qquad [P_1, P_0, P_2] = 1 - c, \qquad [P_0, P_2, P_1] = \frac{1}{c},$$
$$[P_2, P_1, P_0] = \frac{c}{c-1}, \qquad [P_2, P_0, P_1] = \frac{c-1}{c}, \qquad [P_1, P_2, P_0] = \frac{1}{1-c}.$$

(b) Si verifichi che, per $c = -1, \frac{1}{2}, 2$ (se esistono in C) si ha che alcuni tra i valori del rapporto semplice vengono a coincidere. Ci sono altri valori di c per cui ciò accade?

(c) Sia $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ un'affinità e P_0, P_1, P_2 tre punti allineati di $\mathbb{A}$. Si mostri che $[f(P_0), f(P_1), f(P_2)] = [P_0, P_1, P_2]$.

Esercizio 2 (Talete)**.** Siano date due rette distinte r ed r', concorrenti in un punto O. Siano A, B punti di r e A', B' punti di r' distinti da O. Si mostri che $A \vee A'$ e $B \vee B'$ sono parallele se, e solo se, $[O, A, B] = [O, A', B']$.

Esercizio 3 (Pappo)**.** Siano r ed r' due rette distinte e concorrenti nel piano affine. Dati i punti P, Q, R in r e P', Q', R' in r', si mostri che, se $Q' - P$ è parallelo a $Q - P'$ e $R' - Q$ è parallelo a $R - Q'$, allora $R' - P$ è parallelo a $R - P'$.

Esercizio 4 (Talete)**.** Siano r ed s due rette distinte nel piano affine e v un vettore che non sia parallelo né ad r né ad s. Siano P, Q due punti distinti di r e P', Q' le loro immagini in s tramite la proiezione parallela al vettore v. Si verifichi che, preso comunque un punto R di r, il punto R' di s è la proiezione di R parallelamente a v se, e solo se, $[P, Q, R] = [P', Q', R']$.

Esercizio 5. Sia dato un quadrilatero $ABCD$ nel piano affine con i due lati opposti $A \vee B$ e $C \vee D$ tra loro paralleli. Allora, detti $M = \frac{A+D}{2}$ il punto medio tra A e D ed $N = \frac{B+C}{2}$ il punto medio tra B e C, il vettore $M - N$ è parallelo a $B - A$.

Esercizio 6. Sia dato un triangolo (non degenere) ABC nello spazio affine e due punti X nel lato $A \vee B$ ed Y nel lato $A \vee C$ distinti da A. Allora la retta $X \vee Y$ è parallela alla retta $B \vee C$ se, e solo se, $[A, B, X] = [A, C, Y]$.

Esercizio 7. Sia C una campo di caratteristica diversa da 2. Può esistere nello spazio affine su C un triangolo con due mediane parallele?

Esercizio 8. Nel piano affine, siano r ed s due rette parallele e C un punto non appartenente a nessuna delle due rette. Si indichi con $\pi : r \to s$ la corrispondenza che manda il punto X di r in $\pi(X) = (C \vee X) \cap s$.

(a) Si mostri che π è un'applicazione affine tra le due rette.

(b) Si mostri che presi comunque X ed Y in r, si ha $[C, X, \pi(X)] = [C, Y, \pi(Y)]$.

(c) Si mostri che presi comunque X, Y e Z in r, si ha $[X, Y, Z] = [\pi(X), \pi(Y), \pi(Z)]$.

(d) Cosa rispondere alle stesse domande se r ed s non fossero parallele?

Esercizio 9. Sia K un campo di caratteristica diversa da 2. Nel piano affine su K, siano date due rette r ed s, parallele e distinte e si prendano due punti distinti A e B su r. Fissato un punto C non appartenente a nessuna delle due rette, siano $A' = (A \vee C) \cap s$ e $B' = (B \vee C) \cap s$.

(a) Si ponga una condizione su C affinché le due rette $A \vee B'$ e $A' \vee B$ non siano parallele.

(b) Nelle condizioni del punto precedente, sia $C' = (A \vee B') \cap (A' \vee B)$. È vero che la retta $C \vee C'$ interseca la retta r nel punto medio $M = \frac{A+B}{2}$?

Esercizio 10. Siano dati quattro punti allineati, a due a due distinti, P, Q, R, S. Si definisce il *birapporto* (*cross ratio*) dei quattro punti (nell'ordine) come

$$(P, Q, R, S) = \frac{S - Q}{S - P} \frac{R - P}{R - Q} = \frac{[Q, R, S]}{[P, R, S]}.$$

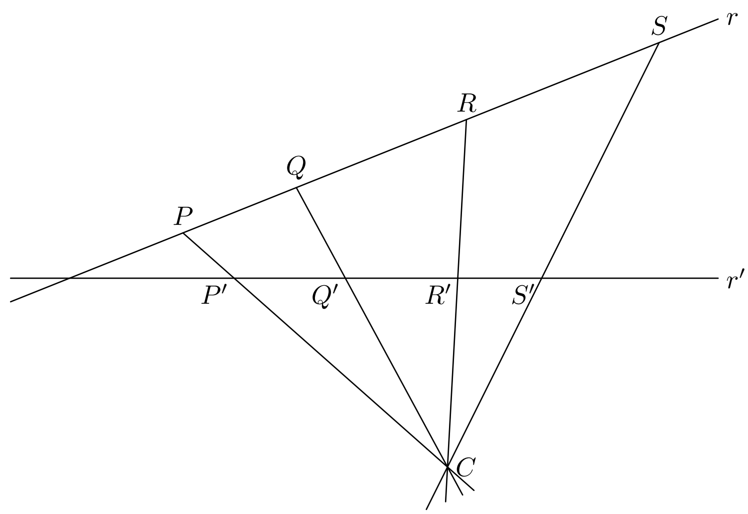
(a) Si osservi che $(P, Q, R, S) = \frac{[S,P,Q]}{[R,P,Q]}$. Ci sono altri modi di scrivere lo stesso birapporto come quoziente di rapporti semplici tra i punti dati?

(b) Posto $(P, Q, R, S) = c$; come si esprime in funzione di c il birapporto degli stessi quattro punti in tutti gli ordinamenti possibili?

(c) Cosa succede del birapporto (P, Q, R, S) se qualcuno dei punti viene a coincidere con un altro?

(d) Sia f un affinità e P, Q, R, S quattro punti allineati. È vero che $(P, Q, R, S) = (f(P), f(Q), f(R), f(S))$?

Esercizio 11. Siano date nel piano due rette distinte r ed r' ed un punto C esterno alle due rette. Si fissino dei punti P, Q, R, S (a due a due distinti) sulla retta r e li si proietti su r' dal centro C, ottenendo i punti P', Q', R', S' come in figura.



Si dimostri che $(P, Q, R, S) = (P', Q', R', S')$.

Esercizio 12. Siano V e V' due spazi vettoriali su uno stesso campo C, di dimensione n ed m rispettivamente. Si dimostri che l'insieme di tutte le applicazioni affini di $f : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V')$ è uno spazio affine associato ad uno spazio vettoriale e se ne determini la dimensione.

Soluzione di alcuni esercizi

2 L'insieme $\{O, A-O\}$ dà un riferimento sulla retta r e, analogamente, $\{O, A'-O\}$ dà un riferimento sulla retta r'. Inoltre, essendo due rette distinte, $\{O, A-O, A'-O\}$ dà un riferimento nel piano che contiene r ed r'. Si ha quindi, $B = O + b(A-O)$ e $B' = O + b'(A'-O)$, ove $b = [O, A, B]$ e $b' = [O, A', B']$. I due vettori $A' - A = (A'-O) - (A-O)$ e $B' - B = b(A-O) - b'(A'-O)$ sono proporzionali se, e solo se, $b = b'$.

3 Sia X_0 il punto di intersezione tra le due rette. Allora, per l'esercizio precedente, si ha

$$\frac{Q'-X_0}{P'-X_0} = [X_0, P', Q'] = [X_0, Q, P] = \frac{P-X_0}{Q-X_0}$$

e, analogamente, .

$$\frac{R'-X_0}{Q'-X_0} = [X_0, Q', R'] = [X_0, R, Q] = \frac{Q-X_0}{R-X_0}.$$

Da cui si deduce

$$[X_0, P', R'] = \frac{R'-X_0}{P'-X_0} = \frac{P-X_0}{R-X_0} = [X_0, R, P]$$

e quindi che $R' - P$ è parallelo a $R - P'$.

4 Sia $R = (1-c)P + cQ \in P \vee Q$, ovvero sia $[P, Q, R] = c$. Siano inoltre, $P' = P + \alpha v$, $Q' = Q + \beta v$. La retta $R + \langle v \rangle$ interseca la retta $s = P' \vee Q'$ nel punto $R' = R + \gamma v = (1-t)P' + tQ'$ per opportuni valori di γ e t in C. Deve quindi aversi

$$P + c(Q-P) + \gamma v = R + \gamma v = P' + t(Q' - P') = P + t(Q-P) + [(1-t)\alpha + t\beta]v.$$

Poiché $Q - P$ e v sono vettori linearmente indipendenti, deve aversi $t = c$ e $\gamma = (1-c)\alpha + c\beta$. Dunque $c = [P', Q', R']$.

7 Il campo ha caratteristica diversa da 2 perché si possa parlare di mediane. Se i tre vertici del triangolo sono allineati (triangolo degenere) allora sono certamente parallele tutte le mediane. Supponiamo quindi di avere un triangolo non degenere, di vertici P, Q, R, in posizione generale nel piano affine. Per il Teorema di Ceva le tre mediane o sono parallele o concorrono ad uno stesso punto. Consideriamo quindi le due mediane $P \vee \frac{Q+R}{2}$ e $\frac{P+Q}{2} \vee R$. Un eventuale punto di intersezione ha quindi coordinate baricentriche del tipo

$$(1-t)P + \frac{t}{2}Q + \frac{t}{2}R = \frac{s}{2}P + \frac{s}{2}Q + (1-s)R,$$

da cui si deduce: $s = t = \frac{2}{3}$ se $3 \neq 0$ in C. Quindi il punto di intersezione esiste ed è il baricentro $G = \frac{P+Q+R}{3}$ se il campo ha caratteristica diversa da 3 e quindi solo in un piano affine su tale campo le mediane di un triangolo sono sempre parallele tra loro.

9 I tre punti A, B, C sono in posizione generale e quindi possiamo riferire ad essi ogni punto del piano. Si ha $A' = (1-t)A + tC$ e $B' = (1-t)B + tC$ (Talete) con $t \notin \{0, 1\}$.

Le rette $A \vee B'$ e $A' \vee B$ si intersecano in un punto $(1-\beta)B + \beta A' = (1-\alpha)A + \alpha B'$ se, e solo se, $\alpha = \beta$ e $1 - \alpha = (1-\alpha)t$; come si vede uguagliando le coordinate baricentriche dei due punti. Da ciò si deduce $\alpha = \frac{1}{2-t}$ e quindi $C' = \frac{1-t}{2-t}A + \frac{1-t}{2-t}B + \frac{t}{2-t}C$. Quindi le due rette $A \vee B'$ e $A' \vee B$ si intersecano in C' se, e solo se, $t \neq 2$, ovvero se, e solo se, la retta r e la retta s non si corrispondono nell'omotetia di centro C e coefficiente -1 (simmetria di centro C).

La retta $C \vee C'$ interseca quindi la retta $r = A \vee B$ in un punto $(1-a)C + aC' = a\frac{1-t}{2-t}A + a\frac{1-t}{2-t}B$ le cui coordinate baricentriche coincidono e qundi, necessariamente, nel punto medio tra A e B (i dubbiosi si ricordino che deve essere $1 - a + a\frac{t}{2-t} = 0$ e completino i calcoli).

Si osservi che, nel caso in cui r ed s si corrispondano nella simmetria di centro C, se si prende in luogo di $C \vee C'$ la parallela ad $A \vee B'$ (e quindi ad $A' \vee B$) passante per C, si ottiene ugualmente una retta che interseca r nel punto medio tra A e B (esercizio!).

11 Sulla retta r i punti P e Q sono in posizione generale ed abbiamo $R = (1-a)P + aQ$, $S = (1-b)P + bQ$ e si deduce che

$$(P, Q, R, S) = \frac{[Q, R, S]}{[P, R, S]} = \frac{(1-b)a}{(1-a)b}.$$

Analogamente, sulla retta r' i punti P' e Q' sono in posizione generale ed abbiamo $R' = (1-a')P' + a'Q'$, $S' = (1-b')P' + b'Q'$ e $(P', Q', R', S') = \frac{(1-b')a'}{(1-a')b'}$.

I punti P, Q e C sono in posizione generale nel piano $r \vee r'$ e quindi possiamo scrivere $P' = (1-r)C + rP$, $Q' = (1-s)C + sQ$ e ricavare delle relazioni sulle coordinate baricentriche di R' ed S', ricordando che $R' = (R \vee C) \cap (P' \vee Q')$ ed $S' = (S \vee C) \cap (P' \vee Q')$; quindi

$$R' = (1-a')\left((1-r)C + rP\right) + a'\left((1-s)C + sQ\right) = \lambda\left((1-a)P + aQ\right) + (1-\lambda)C$$
$$S' = (1-b')\left((1-r)C + rP\right) + b'\left((1-s)C + sQ\right) = \mu\left((1-b)P + bQ\right) + (1-\mu)C$$

da cui, uguagliando le coordinate baricentriche, si deducono le relazioni

$$\begin{cases} (1-a')r = \lambda(1-a) \\ a's = \lambda a \\ (1-a')(1-r) + a'(1-s) = 1-\lambda \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} (1-b')r = \mu(1-b) \\ b's = \mu b \\ (1-b')(1-r) + b'(1-s) = 1-\mu \end{cases}$$

e si conclude che

$$(P', Q', R', S') = \frac{(1-b')a'rs}{(1-a')b'rs} = \frac{(1-b)a\lambda\mu}{(1-a)b\lambda\mu} = (P, Q, R, S),$$

come si doveva verificare.

12 I due spazi affini hanno in evidenza i punti O e O' (corrispondenti ai vettori nulli dei due spazi vettoriali), che possono essere presi come origine dei rispettivi spazi. Ad un'applicazione affine, $f : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}'(V)$, si può associare l'elemento (t', ϕ) del prodotto cartesiano $V' \times \mathrm{Hom}_C(V, V')$, prendendo il vettore $t' = f(O) - O'$ e l'applicazione lineare $\phi : V \to V'$ associata a f. In tal modo, per ogni punto $X \in \mathbb{A}(V)$, si ha

$$f(X) = f(O + (X - O)) = O' + t' + \phi(X - O).$$

Viceversa, data una coppia (t', ϕ), le si può associare l'applicazione affine $f = \tau_{t'} \alpha_{O'} \phi \beta_O$, ove O e O' sono le origini fissate dei due spazi affini. La corrispondenza così stabilita è biunivoca e l'insieme di tutte le applicazioni affini è lo spazio affine, $\mathbb{A}(V' \times \mathrm{Hom}_C(V, V'))$, di dimensione $(n + 1)m$. (Si tratta di uno spazio affine, perché non ha senso "sommare" due applicazioni affini, mentre la coppia (t'', ψ) agisce sull'applicazione affine f descritta sopra, per dare l'applicazione affine $g = f + (t'', \psi)$, definita da $g(X) = O' + t' + t'' + (\phi + \psi)(X - O)$, per ogni punto X. Per avere una descrizione più esplicita, può essere utile scrivere questa operazione in termini di matrici, fissando delle basi per V e V').

Nel caso particolare in cui $V = V'$, le applicazioni affini di $\mathbb{A}(V)$ in sé si possono comporre, dando luogo ad un'operazione interna. Il lettore è invitato a scrivere esplicitamente la composizione di due applicazioni affini nella rappresentazione data.
