**Esercizio 1.** In $\mathbb{E}^3$, dato il piano $\pi$ di equazione $2x+y-z+2=0$ (rispetto ad un riferimento ortonormale), determinare la matrice rispetto al sistema di riferimento dato della proiezione ortogonale su $\pi$ e della simmetria (ortogonale) di asse $\pi$.

**Esercizio 2.** Siano $r$ la retta del piano euclideo reale passante per il punto ${}^t(2,-1)$ e parallela al vettore ${}^t(1,1)$ ed $s$ la retta passante per ${}^t(1,-1)$ e parallela al vettore ${}^t(2,1)$. Quale retta del fascio di centro $r\cap s$ contiene l'origine? E quale retta del fascio è ortogonale alla retta $t$ di equazione $2x-3y+3=0$?

**Esercizio 3.** Si considerino in $\mathbb{R}^4$ i vettori $v=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}$ e $w=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$. Si determini il sottoinsieme $W$ di $\mathbb{R}^4$, formato da tutti i vettori ortogonali sia a $v$ che a $w$, e si verifichi che si tratta di un sottospazio di $\mathbb{R}^4$. Detto $U=\langle v,w\rangle$, si mostri che ogni vettore di $\mathbb{R}^4$ si scrive, in modo unico, come somma di un vettore di $U$ e di un vettore di $W$.

**Esercizio 4.** Dati due punti $P$ e $Q$ dello spazio euclideo, si indichi il segmento di retta che li congiunge con $PQ=\{\,P+\lambda(Q-P)\mid\lambda\in[0,1]\,\}$ e si verifichi che $\mathit{vol}^1(PQ)=\|Q-P\|$.

**Esercizio 5.** Si consideri lo spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ ed i punti

$$P_0=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\quad P_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad P_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix},\quad P_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Si calcolino $\mathit{vol}^3(\Delta(P_0,P_1,P_2,P_3))$, $\mathit{vol}^2(PL(P_0,P_1,P_3))$, $\mathit{vol}^1(\Delta(P_1,P_2))$; ove $\Delta(P_0,P_1,P_2,P_3)$ indica il simplesso (3-dimensionale) avente come vertici i quattro punti dati e $PL(P_0,P_1,P_3)$ indica il parallelogramma avente i punti $P_0$, $P_1$, $P_3$ come vertici e $\Delta(P_1,P_2)$ è il simplesso (1-dimensionale) avente come estremi i due punti.

**Esercizio 6.** Si considerino $n+1$ punti $P_0,P_1,\dots,P_n$ dello spazio euclideo, $\mathbb{E}:=\mathbb{E}^n(\mathbb{R})$ ed il simplesso $\Delta$, determinato da tali punti . Data un'applicazione affine $f:\mathbb{E}\to\mathbb{E}$, sia $\Delta'$ il simplesso determinato dai punti $f(P_0),f(P_1),\dots,f(P_n)$. Si verifichi che $\mathit{vol}^n(\Delta')=|\det f|\mathit{vol}^n(\Delta)$ (il determinante di un'applicazione affine è il determinante dell'applicazione lineare associata).

**Esercizio 7.** Siano $w_1,\dots,w_k$ una base ortonormale del sottospazio $W$ di $\mathbb{R}^n$. Si mostri che, dato comunque un vettore $v$ di $\mathbb{R}^n$, il vettore $v-(v\cdot w_1)w_1-\cdots-(v\cdot w_k)w_k$ è ortogonale ad ogni vettore di $W$. Si verifichi che $w_0=(v\cdot w_1)w_1+\cdots+(v\cdot w_k)w_k$ è la *proiezione ortogonale* di $v$ su $W$, ovvero quell'unico vettore $w$ di $W$ tale che $v-w$ sia ortogonale a $W$. Si verifichi infine che $\|v-w_0\|\le\|v-w\|$, per ogni $w\in W$.

**Esercizio 8.** Si considerino la retta $r$, passante per $P$ e parallela al vettore $v$ ed un punto $X$ dello spazio. Si verifichi che $d(X,r)^2=\|\overrightarrow{PX}\|^2-\frac{(\overrightarrow{PX}\cdot v)^2}{\|v\|^2}$. Si faccia un disegno che giustifichi questa uguaglianza e si osservi che questa formula è valida nello spazio euclideo di dimensione qualsiasi.

**Esercizio 9.** Nello spazio euclideo si considerino i punti

$$P=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\qquad Q=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\qquad R=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix},\qquad S=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

e le rette $r=P\vee Q$ ed $s=R\vee S$.

(a) Si scrivano le equazioni cartesiane di $r$ ed $s$ e si calcoli la loro distanza.

(b) Si scriva l'equazione del luogo $\mathscr{Q}$ dei punti la cui distanza da $r$ è doppia della distanza da $s$.

**Esercizio 10.** Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino le rette $r_1$ ed $r_2$, di equazioni

$$r_1:\begin{cases}x-2y+z=-2\\x-z=0\end{cases}\qquad\text{e}\qquad r_2:\begin{cases}x+y=0\\z=0\end{cases}.$$

(a) Si verifichi che le due rette sono sghembe e si scriva l'equazione del luogo $\mathscr{Q}$ dei punti equidistanti dalle due rette.

(b) Si verifichi che tutti i piani paralleli a $\pi: x+y+z=0$ tagliano su $\mathscr{Q}$ delle curve di secondo grado (cosa se ne può dire?).

**Esercizio 11.** Nello spazio euclideo $n$-dimensionale siano dati un punto $P$ ed un vettore $v \neq 0$, e si consideri l'applicazione $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, definita ponendo

$$f(X) = X - \frac{2v \cdot (X - P)}{v \cdot v} v, \qquad \text{per ogni } X \in \mathbb{A},$$

ove $\cdot$ indica il prodotto scalare.

(a) Si mostri che $f$ è un'isometria.

(b) Si mostri che l'insieme dei punti uniti, $H = \{ X \in \mathbb{A} \mid f(X) = X \}$, è un iperpiano e si determinino un suo punto ed il suo spazio direttore.

(c) Si scriva la matrice dell'applicazione $f : \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3$, definita sopra, nel caso in cui $P = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ e $v = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

**Esercizio 12.** Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il punto $P$ e la retta $r$, ove

$$P = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \qquad \text{ed} \qquad r : \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} .$$

(a) Si scriva l'equazione del luogo $\mathscr{Q}$ dei punti che hanno uguale distanza dal punto $P$ e dalla retta $r$.

(b) Si determini la retta $s$, passante per $P$, perpendicolare ad $r$ ed incidente quest'ultima.

(c) Cosa si può dire delle curve che si ottengono intersecando $\mathscr{Q}$ con i piani del fascio di asse $s$.

**Esercizio 13.** Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il punto $P = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ ed il piano $\pi : x + y - z = 0$.

(a) Si scriva l'equazione del luogo $\mathscr{Q}$ dei punti che hanno uguale distanza dal punto $P$ e dal piano $\pi$.

(b) Si determini la retta $s$, passante per $P$, perpendicolare a $\pi$ e si descrivano, le curve che si ottengono intersecando $\mathscr{Q}$ con i piani del fascio di asse $s$.

(c) Si verifichi che i piani perpendicolari ad $s$ tagliano su $\mathscr{Q}$ una famiglia di cerchi (eventualmente di raggio immaginario).

**Esercizio 14.** Nello spazio euclideo tridimensionale, si consideri la circonferenza di centro $C = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ e raggio 2, contenuta nel piano $\pi : x + 2y = 0$. Si determini l'equazione cartesiana del cono $\mathscr{C}$, di vertice $V = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, che proietta tale circonferenza nello spazio.

**Esercizio 15.** Si consideri nel piano euclideo un triangolo (non degenere) di vertici $A$, $B$, $C$ e siano $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ i corrispondenti angoli interni e $a$, $b$, $c$ le lunghezze dei lati opposti (ad es. $a = \|C - B\|$). Dimostrare che

(a) Il punto

$$L = \frac{a}{a+b+c} A + \frac{b}{a+b+c} B + \frac{c}{a+b+c} C$$

è il centro della circonferenza inscritta nel triangolo (ovvero l'intersezione delle bisettrici del triangolo).

(b) Il punto

$$M = \frac{\tan\alpha}{\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma} A + \frac{\tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma} B + \frac{\tan\gamma}{\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma} C$$

è il punto di intersezione delle altezze del triangolo (si discuta a parte il caso di un triangolo rettangolo).

(c) Il punto

$$N = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma} A + \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma} B + \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma} C$$

è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo (ovvero l'intersezione degli assi dei lati del triangolo).

**Esercizio 16** (Decomposizione $QR$)**.** Sia $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ una matrice di rango $n$.

(a) Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt sulle colonne di $A$, si mostri che esistono una matrice, $Q \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, ed una matrice invertibile e triangolare superiore, $R \in M_n(\mathbb{R})$, tali che ${}^tQQ = \mathbf{1}_n$ e $A = QR$.

(b) Si consideri il sistema lineare $Ax = b$ con $b \in \mathbb{R}^m$. Utilizzando la decomposizione, $A = QR$, descritta nel punto precedente, si consideri il sistema (*non equivalente*, in generale) ${}^tQAx = {}^tQb$, ovvero $Rx = {}^tQb$. Poiché $R$ è invertibile, quest'ultimo sistema ammette sempre un'unica soluzione. Si dica che relazioni ci sono tra $b$ e ${}^tQb$ e tra la soluzione di $Rx = {}^tQb$ e la soluzione (quando esiste) del sistema iniziale.

(c) Nelle notazioni del punto precedente, sia $\xi \in \mathbb{R}^n$ la soluzione del sistema $Rx = {}^tQb$. Si mostri che, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $\|A\xi - b\| \leq \|Ax - b\|$.

**Esercizio 17** (minimi quadrati)**.** Sia $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ una matrice di rango $n$.

(a) Si consideri il sistema lineare $Ax = b$ con $b \in \mathbb{R}^m$. Si dimostri che ${}^tAA$ è una matrice invertibile e si concluda che il sistema ${}^tAAx = {}^tAb$ ammette sempre un'unica soluzione.

(b) Nelle notazioni del punto precedente, sia $\xi = ({}^tAA)^{-1}\,{}^tAb \in \mathbb{R}^n$ la soluzione del sistema ${}^tAAx = {}^tAb$. Si mostri che, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $\|A\xi - b\| \leq \|Ax - b\|$.