Esercizio 1 (Cilindro)**.** Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^n$, siano fissati un punto, P_0, un vettore, $v_0 \neq 0$, ed un numero reale $d \in [0, +\infty)$. Si chiama *cilindro* di asse $r = P_0 + \langle v_0 \rangle$ e raggio d, l'insieme dei punti che hanno distanza d dalla retta r, ovvero l'insieme

$$C_{r,d} = \left\{ X \in \mathbb{E}^n \,\middle|\, \|X - P_0\|^2 - \frac{[(X - P_0) \cdot v_0]^2}{v_0 \cdot v_0} = d^2 \right\}.$$

(a) Si verifichi che la definizione è coerente e che $C_{r,0}$ coincide con la retta r.

(b) Si verifichi che, in $\mathbb{E}^3$, si ha

$$C_{r,d} = \left\{ X \in \mathbb{E}^3 \,\middle|\, \frac{\|(X - P_0) \times v_0\|}{\|v_0\|} = d \right\}.$$

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ si consideri la retta, r, di equazioni cartesiane $r : \begin{cases} X_1 + X_2 = 0 \\ X_2 - X_3 = 1 \end{cases}$. Si determini l'equazione del cilindro di asse r, contenente l'origine di $\mathbb{E}^3$.

Esercizio 3. Si determinino le equazioni per il luogo dei punti in $\mathbb{E}^3$ equidistanti da due rette, distinguendo i casi in cui le due rette, $r_1 = P_1 + \langle v_1 \rangle$ ed $r_2 = P_2 + \langle v_2 \rangle$, siano incidenti, parallele o sghembe.

Esercizio 4 (Cono)**.** Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^n$, siano fissati un punto, P_0, un vettore, $v_0 \neq 0$, ed un angolo $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Si chiama *cono* di asse $r = P_0 + \langle v_0 \rangle$ ed apertura ϑ, l'insieme dei punti, X, tali che la retta $X \vee P_0$ formi un angolo ϑ con la retta r, unito al punto P_0, ovvero l'insieme

$$\mathscr{C}_{r,\vartheta} = \left\{ X \in \mathbb{E}^n \,\middle|\, \cos^2\vartheta \|X - P_0\|^2 - \frac{[(X - P_0) \cdot v_0]^2}{v_0 \cdot v_0} = 0 \right\}.$$

(a) Si verifichi che la definizione è coerente e che $\mathscr{C}_{r,0} = C_{r,0}$ coincide con la retta r.

(b) Si verifichi che, quando $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, l'equazione del cono coincide con il quadrato dell'equazione del piano per P_0 ortogonale a v_0.

Esercizio 5. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$, siano fissati il punto, O (l'origine), ed il vettore e_1 della base canonica.

(a) Si scriva l'equazione del cono di asse $r = O + \langle e_1 \rangle$ ed apertura $\vartheta = \frac{\pi}{3}$.

(b) Si determinino le intersezioni del cono con gli iperpiani ortogonali ad r.

(c) Si determinino le intersezioni del cono con le sottovarietà lineari contenenti r.

Esercizio 6 (altri coni)**.** Nello spazio euclideo, $\mathbb{E}^n$, siano fissati un punto, P_0, ed una curva, C. Si chiama *cono* di vertice P_0, proiettante la curva C, l'insieme dei punti appartenenti a rette congiungenti P_0 con un punto di C.

(a) In $\mathbb{E}^3$, sia $P_0 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ e C la circonferenza di centro $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ e raggio 1, posta nel piano $\pi : Z = 1$. Si determini l'equazione cartesiana soddisfatta dai punti del cono di vertice P_0, proiettante C.

(b) In $\mathbb{E}^3$, sia $P_0 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ e C l'iperbole di equazioni $C : \begin{cases} XY = 2 \\ Z = 1 \end{cases}$. Si determini l'equazione cartesiana soddisfatta dai punti del cono di vertice P_0, proiettante C.

Esercizio 7. Siano $\mathbb{L}$ ed $\mathbb{M}$ due sottovarietà lineari parallele della stessa dimensione, k, in $\mathbb{A}^n$ e sia dato un punto, $C \notin \mathbb{L} \cup \mathbb{M}$, tale che $\mathbb{L} \vee C = \mathbb{M} \vee C$. Si mostri che la corrispondenza che a un punto, $X \in \mathbb{L}$ associa $p_C(X) = (X \vee C) \cap \mathbb{M}$ è un'applicazione ben definita $p_C : \mathbb{L} \to \mathbb{M}$ e che tale applicazione è un'affinità.

Esercizio 8. Notazioni come nell'esercizio 7.

(a) Fissato un punto $X \in \mathbb{L}$ sia λ_0 lo scalare definito da $p_C(X) - C = \lambda_0(X - C)$. Si mostri che λ_0 non dipende dalla scelta del punto X.

(b) Fissato due punti, $X, Y \in \mathbb{L}$, si mostri che $p_C(Y) - p_C(X) = \lambda_0(Y - X)$.

Esercizio 9 (Teorema di Talete?)**.** Siano dati in $\mathbb{A}^n$ due rette, r ed s, incidenti in un punto C, e tre iperpiani distinti, $\mathbb{L}_1$, $\mathbb{L}_2$, $\mathbb{L}_3$, paralleli tra loro, ma non paralleli a una delle due rette (fare un disegno per $n = 2$ ed $n = 3$). Si deduca dagli esercizi precedenti che, posto $R_i = r \cap \mathbb{L}_i$ ed $S_i = s \cap \mathbb{L}_i$, per $i = 1, 2, 3$, si ha $\frac{R_3-R_1}{R_2-R_1} = \frac{S_3-S_1}{S_2-S_1}$.

Esercizio 10 (punti notevoli di un triangolo)**.** Nel piano euclideo, siano A, B, C i vertici di un triangolo non degenere ed indichiamo con $a = \|B - C\|$, $b = \|C - A\|$, $c = \|B - A\|$, le lunghezze dei lati e con $p = a + b + c$ il perimetro.

(a) Si mostri che il punto di intersezione delle bisettrici del triangolo (*incentro*) è il punto

$$I = \frac{a}{p}A + \frac{b}{p}B + \frac{c}{p}C.$$

(b) Posto $v = B - A$ e $w = C - A$, si mostri che l'intersezione delle altezze del triangolo (*ortocentro*) è il punto

$$H = \frac{(v\cdot v - v\cdot w)(w\cdot w - v\cdot w)}{(v\cdot v)(w\cdot w) - (v\cdot w)^2}A + \frac{(v\cdot w)(w\cdot w) - (v\cdot w)^2}{(v\cdot v)(w\cdot w) - (v\cdot w)^2}B + \frac{(v\cdot v)(v\cdot w) - (v\cdot w)^2}{(v\cdot v)(w\cdot w) - (v\cdot w)^2}C.$$

(c) Si mostri che l'intersezione degli assi dei del triangolo (*circocentro*) è il punto

$$K = \frac{(v\cdot w)(v\cdot v + w\cdot w - 2v\cdot w)}{2[(v\cdot v)(w\cdot w) - (v\cdot w)^2]}A + \frac{(w\cdot w)(v\cdot v - v\cdot w)}{2[(v\cdot v)(w\cdot w) - (v\cdot w)^2]}B + \frac{(v\cdot v)(w\cdot w - v\cdot w)}{2[(v\cdot v)(w\cdot w) - (v\cdot w)^2]}C.$$

Esercizio 11 (retta di Eulero)**.** Nel piano euclideo, siano A, B, C i vertici di un triangolo non degenere e ricordiamo che il baricentro è il punto $M = \frac{1}{3}(A + B + C)$.

(a) Si mostri che il baricentro, l'ortocentro ed il circocentro del triangolo sono allineati. La retta contenente questi tre punti è detta la *retta di Eulero*.

(b) Si mostri che l'incentro giace sulla retta di Eulero se, e solo se, il triangolo è isoscele.

(c) Dati i tre punti notevoli I, M ed H è possibile ricostruire i vertici del triangolo A, B, C?

Esercizio 12. Si consideri $\mathbb{C}^n$ con il prodotto scalare hermitiano, $\langle v \,|w\rangle = \bar{z}_1 w_1 + \cdots + \bar{z}_n w_n$, ove $v = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$.

(a) Sia $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_k\}$ una base ortonormale di un sottospazio W e sia dato un vettore $v \in \mathbb{C}^n$. Si verifichi che il vettore $v_0 = \sum_{i=1}^k \langle u_i \,|v\rangle\, u_i$ è la proiezione ortogonale di v su W (ovvero $v_0 \in W$ e $v - v_0 \in W^\perp$).

(b) Sia $U \in M_{n\times k}(\mathbb{C})$ la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori $u_1, \dots, u_k$ in base canonica (ovvero $U = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{E}}(j)$ ove $j : W \to \mathbb{C}^n$ è l'inclusione naturale). Si verifichi che $A = U{}^t\bar{U}$ è la matrice in base canonica della proiezione ortogonale sul sottospazio W.

Esercizio 13. La matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 3+i & 1 \\ 1 & 3-i \end{smallmatrix}\right)$ è simmetrica. È vero o falso che A è diagonalizzabile? Si determini la forma di Jordan di A.

Esercizio 14. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice antisimmetrica (${}^tA = -A$). Si mostri che A è unitariamente diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ e che tutti i suoi autovalori sono numeri puramente immaginari.

Soluzione di alcuni esercizi

6 (a). La circonferenza, C, ha equazioni $\begin{cases} X^2+Y^2=1 \\ Z=1 \end{cases}$. Dato un punto, $X=\left(\begin{smallmatrix} x\\ y\\ z\end{smallmatrix}\right) \neq P_0$ di $\mathbb{E}^3$, un generico punto della retta $P_0 \vee X$ ha coordinate $P_t = \left(\begin{smallmatrix} 1+t(x-1)\\ 1+t(y-1)\\ tz\end{smallmatrix}\right)$, al variare di t in $\mathbb{R}$. Il punto appartiene al piano π se, e solo se, $t=1/z$ e sta sulla curva C se $\left(1+\frac{x-1}{z}\right)^2+\left(1+\frac{y-1}{z}\right)^2=1$. Quindi, moltiplicando per z^2 i due membri dell'equazione (all'insieme delle soluzioni si è aggiunto un solo punto. quale?) si deduce che i punti del cono sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione

$$(X+Z-1)^2+(Y+Z-1)^2=Z^2 \qquad \text{ovvero} \qquad X^2+Y^2+Z^2+2XZ+2YZ-2X-2Y-4Z+2=0.$$

(b). Analogamente, si ottiene l'equazione $XY+XZ+YZ-Z^2-X-Y-Z+1=0$.

7 Se $\mathbb{L}=\mathbb{M}$, $P_C(X)=X$ e la tesi è verificata, possiamo quindi supporre che $\mathbb{L}\cap\mathbb{M}=\varnothing$ ed $\mathbb{L}\vee C=\mathbb{M}\vee C=\mathbb{L}\vee\mathbb{M}$. Dato un punto $X\in\mathbb{L}$, la retta $X\vee C$ non può essere parallela ad $\mathbb{M}$ e quindi, per motivi di dimensione, $(X\vee C)\cap\mathbb{M}$ è un punto di $\mathbb{M}$ e perciò è ben definita l'applicazione $p_C:\mathbb{L}\to\mathbb{M}$.

Siano quindi $P_0,\dots,P_k$ punti di $\mathbb{L}$ in posizione generale e sia $Q_i=p_C(P_i)$, per $i=0,\dots,k$. Per mostrare che p_C è un'affinità è sufficiente verificare che i punti $Q_0,\dots,Q_k$ di $\mathbb{M}$ sono in posizione generale e che p_C rispetta le combinazioni baricentriche. Per $i=1,\dots,k$, sia $w_i=P_i-P_0$ ed osserviamo che, essendo P_0, Q_0 e C punti allineati, si ha $Q_0-C=\lambda_0(P_0-C)$ per qualche scalare $\lambda_0\neq 0$. Posto $Q_i'=Q_0+\lambda_0 w_i$, si ha $Q_i'\in\mathbb{M}$ perché $\mathbb{L}$ ed $\mathbb{M}$ han lo stesso spazio direttore e

$$Q_i'-C=(Q_0-C)+\lambda_0 w_i=\lambda_0(P_0-C)+\lambda_0 w_i=\lambda_0(P_i-C)$$

e quindi $Q_i'\in\mathbb{M}\cap(C\vee P_i=\{Q_i\}$, da cui si deduce che $Q_i-Q_0=\lambda_0 w_i$, per $i=1,\dots,k$ e quindi anche i punti $Q_0,\dots,Q_k$ sono in posizione generale.

Sia ora $X=c_0P_0+\cdots+c_kP_k$ con $c_0+\cdots+c_k=1$. Allora, per la definizione stessa delle combinazioni baricentriche, $X-C=c_0(P_0-C)+\cdots+c_k(P_k-C)$ e quindi

$$\begin{aligned} C+\lambda_0(X-C) &= C+c_0\lambda_0(P_0-C)+\cdots+c_k\lambda_0(P_k-C)= \\ &= C+c_0(Q_0-C)+\cdots+c_k(Q_k-C) \\ &= c_0Q_0+\cdots+c_kQ_k\in\mathbb{M}\cap(C\vee X) \end{aligned}$$

e si conclude che $P_C(X)=c_0Q_0+\cdots+c_kQ_k$ per cui p_C rispetta le combinazioni baricentriche ed è quindi un'affinità.

10 (a). Siano v e w i vettori del testo, per cui $\|v\|=c$, $\|w\|=b$, $\|w-v\|=a$. Il punto di intersezione delle bisettrici è determinato dalle condizioni $I=A+t(\frac{v}{\|v\|}+\frac{w}{\|w\|})=A+v+s(-\frac{v}{\|v\|}+\frac{w-v}{\|w-v\|})$ per opportuni valori di s e t determinati dall'uguaglianza scritta sopra che è equivalente a $\begin{cases} \frac{t}{\|v\|}=1-\frac{s}{\|v\|}-\frac{s}{\|w-v\|} \\ \frac{t}{\|w\|}=\frac{s}{\|w-v\|} \end{cases}$ ovvero $\begin{cases} s=\frac{\|v\|\,\|w-v\|}{p} \\ t=\frac{\|v\|\,\|w\|}{p} \end{cases}$, ove $p=a+b+c=\|v\|+\|w\|+\|w-v\|$.
Sostituendo si trova $I=A+\frac{b}{p}(B-A)+\frac{c}{p}(C-A)$, da cui si ricava l'espressione richiesta.
(b). Sia $v_1=\frac{v}{\|v\|}$ e v_2 il vettore che si ottiene ruotando v_1 di un angolo retto. Si ha così $v=cv_1$, $w=xv_1+yv_2$, con $x=v_1\cdot w$ ed $y^2=\|w\|^2-(v_1\cdot w)^2$ (e possiamo supporre $y>0$). Il punto di intersezione delle altezze è determinato dalle condizioni $H=A+w+tv_2=A+v+s(-yv_1+xv_2)$ per opportuni valori di s e t determinati dall'uguaglianza scritta sopra, da cui si ricava $\begin{cases} s=\frac{c-x}{y} \\ t=\frac{cx-x^2-y^2}{y} \end{cases}$. Sostituendo i valori di s e t e semplificando in modo opportuno si ottiene l'espressione richiesta per le coordinate baricentriche del punto H.
(c). Si considerino i punti medi dei lati del triangolo, ovvero $D=(B+C)/2$, $E=(C+A)/2$, $F=(A+B)/2$. L'intersezione degli assi dei lati del triangolo ABC coincide con l'intersezione delle altezze del triangolo DEF e quest'ultimo punto è l'immagine del punto H tramite l'affinità che manda ordinatamente $A\mapsto D$, $B\mapsto E$, $C\mapsto F$. Poiché le affinità conservano le combinazioni baricentriche si ha

$$K=\frac{(v\cdot v-v\cdot w)(w\cdot w-v\cdot w)}{(v\cdot v)(w\cdot w)-(v\cdot w)^2}D+\frac{(v\cdot w)(w\cdot w)-(v\cdot w)^2}{(v\cdot v)(w\cdot w)-(v\cdot w)^2}E+\frac{(v\cdot v)(v\cdot w)-(v\cdot w)^2}{(v\cdot v)(w\cdot w)-(v\cdot w)^2}F,$$

da cui si ricava l'espressione richiesta per le coordinate baricentriche del circocentro.

11 (a). Si consideri l'affinità f, definita da $f(A)=(B+C)/2=D$, $f(B)=(C+A)/2=E$, $f(C)=(A+B)/2=F$ e poniamo nel piano il riferimento $\mathcal{R}=\{A,v,w\}$. Si ha quindi $f(A)=(B+C)/2=A+\frac{1}{2}v+\frac{1}{2}w$ e $\phi(v)=f(B)-f(A)=-\frac{1}{2}v$, $\phi(w)=f(C)-f(A)=-\frac{1}{2}w$, ove ϕ è l'applicazione lineare associata ad f. Quindi

$$\alpha_{\mathcal{R},\mathcal{R}}(f)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

e si verifica che il baricentro $M=A+\frac{1}{3}v+\frac{1}{3}w$ è un punto unito e che tutte le rette che passano per M sono globalmente unite per f. Inoltre, ogni retta, r, del piano è parallela alla sua immagine, $f(r)$, perché ϕ ha una matrice scalare. Quindi la retta $M\vee H$ è unita e contiene l'intersezione delle altezze del triangolo DEF, ovvero il punto K.
(b) e (c) are left to the reader.