Esercizio 1. Date le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

quali di queste si possono sommare? E quali moltiplicare? Svolgere tutte le operazioni di somma e prodotto possibili.

Esercizio 2. Date due matrici A e B $m \times n$ la scrittura $(A + B)^2$ ha sempre senso? Nel caso in cui abbia senso, esiste una formula per calcolare questa potenza simile a quella dello sviluppo del binomio? Se $B = \mathbf{1}$ cosa succede? E se $B = \lambda\mathbf{1}$? (Chiarirsi il problema con il caso di matrici 2×2.

Esercizio 3. Sia X una matrice quadrata di ordine n. Si mostri che, se $AX = XA$ per ogni $A \in M_n(C)$, allora $X = c\mathbf{1}_n$ (matrice scalare).

Esercizio 4. Sia $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$. Si mostri che, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & -4n & 8n^2 - 5n \\ 0 & 1 & -4n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Trovare una formula esplicita in funzione dell'esponente $n \in \mathbb{N}$ per le entrate delle matrici X^n, quando $X = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[**sugg.** Si considerino la matrice $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e le sue potenze.]

Esercizio 5. Si consideri l'endomorfismo $\psi\colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ di matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica e si determinino le matrici, rispetto alle basi canoniche, di tutte le applicazioni lineari $\phi\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3$ tali che $\psi \circ \phi = 0$.

Esercizio 6. Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e si consideri l'applicazione $\phi_A\colon M_2(\mathbb{Q}) \to M_2(\mathbb{Q})$, definita ponendo $\phi_A(X) = AX - XA$, al variare di $X \in M_2(\mathbb{Q})$. Si mostri che si tratta di un'applicazione lineare e si determinino, al variare di A in $M_2(\mathbb{Q})$, il nucleo e l'immagine di ϕ_A.

Esercizio 7. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_3\}$ una sua base.

(a) Si scrivano le matrici $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\varphi)$ di tutte le applicazioni lineari, $\phi : V \to V$, soddisfacenti alle condizioni

$$\phi(2v_1 + v_2) = 2v_1 - v_2, \quad \phi(v_1 + 2v_2 - v_3) = v_1 - v_2 + v_3, \quad \phi(v_1 - v_2 + v_3) = v_1 - v_3.$$

(b) Siano ϕ_1 e ϕ_2 due applicazioni descritte al punto (a). Si determini il nucleo di $\phi_2 - \phi_1$. Si dica se esistono ϕ_1 e ϕ_2 soddisfacenti alla condizione $\phi_2(v_1) = 2v_1 + 4v_3 = 2\phi_1(v_1)$. In caso affermativo, si determini $\mathrm{im}(\phi_2 - \phi_1)$.

(c) Le applicazioni, ϕ, descritte al punto (a) sono tutte invertibili? In caso contrario, si dia una condizione necessaria e sufficiente su $\phi(v_1 + v_2 + v_3)$ affinché ϕ sia invertibile.

Esercizio 8. Sia K un campo e siano $A \in M_{3\times 2}(K)$, $B \in M_2(K)$, $C \in M_{2\times 3}(K)$, tali che

$$ABC = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & x & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determini $x \in K$. È unica la soluzione?

(b) Si determinino delle matrici A, B e C che soddisfano alla condizione data. È unica la soluzione?

(c) È possibile determinare tutte le matrici A, B e C che soddisfano alla condizione data?

Esercizio 9. Si considerino gli spazi vettoriali U, V, W, Z, di dimensione finita sul corpo C, e le applicazioni lineari $U \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} W \xrightarrow{\gamma} Z$ Si mostri che

(a) $\operatorname{rk}(\gamma \circ \beta) + \operatorname{rk}(\beta \circ \alpha) \leq \operatorname{rk}\beta + \operatorname{rk}(\gamma \circ \beta \circ \alpha)$;

(b) $\operatorname{rk}\alpha + \operatorname{rk}\beta - \dim V \leq \operatorname{rk}(\beta \circ \alpha) \leq \min\{\operatorname{rk}\alpha, \operatorname{rk}\beta\}$.

Esercizio 10. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^2$ e si osservi che si tratta di uno spazio vettoriale sia sul campo $\mathbb{C}$ che sul campo $\mathbb{R}$.

(a) Si calcolino le seguenti dimensioni: $\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^2$, $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}^2$, $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$, $\dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$, $\dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$.

(b) Si consideri l'applicazione $\sigma : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, definita da $\sigma\left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{smallmatrix}\right)$. Si verifichi che σ è un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare, ma non $\mathbb{C}$-lineare.

(c) Si consideri la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ di $\mathbb{C}^2$ su $\mathbb{C}$ e sia $\mathcal{E}_{\mathbb{R}} = \{e_1, e_2, ie_1, ie_2\}$. Si mostri che $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$ è una base di $\mathbb{C}^2$ come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Si caratterizzino le matrici rispetto a questa base degli elementi di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$.

(d) Sia $H = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$ e sia $H' = \left\{ \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2) \,\middle|\, \psi(cv) = \bar{c}\psi(v),\ \forall v \in \mathbb{C}^2, \forall c \in \mathbb{C} \right\}$. Si mostri che la corrispondenza $H \to H'$ definita da $\phi \mapsto \sigma \circ \phi$ è un isomorfismo di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali.

(e) Si concluda che $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2) = H \oplus H'$.

Esercizio 11. Una *sequenza esatta* di omomorfismi di spazi vettoriali è una collezione di applicazioni lineari, $V_0 \xrightarrow{\alpha_0} V_1 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} V_{n+1}$, tale che, per ogni coppia di omomorfismi consecutivi, α_i ed α_{i+1}, si abbia $\operatorname{im}\alpha_i = \ker \alpha_{i+1}$.

(a) Si mostri che, per una *sequenza esatta breve*, $0 \longrightarrow U \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} W \longrightarrow 0$, si ha $\dim_C V = \dim_C U + \dim_C W$.

(b) Più in generale, si mostri che, per una *sequenza esatta* del tipo, $0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} V_n \longrightarrow 0$ si ha $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^j \dim_C V_j = 0$.

Esercizio 12. Sia C un corpo e consideriamo il sottospazio M_k^n di $C[x_1, \ldots, x_n]$, generato da tutti i monomi di grado k, ovvero

$$M_k^n = \langle\, x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n} \mid r_1 + \cdots + r_n = k \,\rangle\,.$$

(a) Si mostri che, qualunque sia l'intero n, si ha $\dim_C M_n^1 = 1$ e $\dim_C M_1^n = n$.

(b) Fissati gli interi n e k, si mostri che si ha una sequenza esatta breve

$$0 \longrightarrow M_k^{n+1} \xrightarrow{\alpha} M_{k+1}^{n+1} \xrightarrow{\beta} M_{k+1}^{n} \longrightarrow 0$$

ove $\alpha(m) = x_{n+1}m$, per ogni $m \in M_k^{n+1}$, e $\beta(x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n} x_{n+1}^{r_{n+1}}) = \begin{cases} 0 & \text{se } r_{n+1} > 0 \\ x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n} & \text{altrimenti} \end{cases}$.

(c) Servendosi delle osservazioni precedenti, si dimostri per induzione che $\dim_C M_k^n = \binom{n+k-1}{k}$.

Esercizio 13. Sia fissato un polinomio a coefficienti complessi

$$Q(X) = c(X - \alpha_1)^{m_1} \cdots (X - \alpha_r)^{m_r},$$

ove $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sono le radici di $Q(X)$, a due a due distinte, $c \in \mathbb{C}$ ed $m_1 + \cdots + m_r = n = \deg Q > 0$. Si verifichi che l'insieme $V_Q = \left\{ \frac{P(X)}{Q(X)} \mid P(X) \in \mathbb{C}[X],\ \deg P < \deg Q \right\}$ è un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale di dimensione n.

Si mostri che l'insieme $\left\{ \frac{1}{(X-\alpha_i)^j} \mid i = 1, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, m_i \right\}$ è una base di V_Q.

Esercizio 14. Dati due sottoinsiemi di un insieme finito, S_1 ed S_2, vale la formula $\#(S_1 \cup S_2) = \#S_1 + \#S_2 - \#(S_1 \cap S_2)$ e vi è un analogo per le dimensioni dei sottospazi di uno spazio vettoriale di dimensione finita, nelle Relazioni di Grassmann $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$. Dati tre sottoinsiemi, si ha

$$\begin{aligned} \#(S_1 \cup S_2 \cup S_3) = &\#S_1 + \#S_2 + \#S_3 - \#(S_1 \cap S_2) - \#(S_1 \cap S_3) - \\ &- \#(S_2 \cap S_3) + \#(S_1 \cap S_2 \cap S_3); \end{aligned}$$

è vero o falso che vale l'analogo per i sottospazi, ovvero che

$$\begin{aligned} \dim(W_1 + W_2 + W_3) = &\dim W_1 + \dim W_2 + \dim W_3 - \dim(W_1 \cap W_2) - \\ &- \dim(W_1 \cap W_3) - \dim(W_2 \cap W_3) + \dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3)\ ? \end{aligned}$$

Esercizio 15. Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una base dello spazio vettoriale V. Sia U il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u_1 = v_1 + v_2 - v_3 + v_4 - v_5$, $u_2 = 2v_1 + v_3 + 2v_4 - v_5$, $u_3 = 2v_2 - 3v_3 - v_5$, e sia W il sottospazio vettoriale definito dal sistema di equazioni omogenee $\begin{cases} X_2 - X_3 + X_4 = 0 \\ 4X_1 - X_2 + 3X_3 - X_4 = 0 \\ 2X_1 + X_3 = 0 \end{cases}$.

(a) Si determinino le rispettive dimensioni ed una base per i sottospazi U e W. Si determinino delle equazioni cartesiane per il sottoinsieme di V che si ottiene traslando tutti i vettori di U per il vettore $u_0 = 2v_1 - v_3$.

(b) Si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)$ dell'endomorfismo $\pi : V \to V$ che si ottiene proiettando i vettori su U parallelamente a W.

(c) Sia $\Phi : \operatorname{Hom} V \to \operatorname{Hom} V$ definito ponendo $\Phi(\phi) = \phi - \pi \circ \phi$. Si determinino le dimensioni di nucleo ed immagine di Φ. È vero che si tratta di una proiezione? In caso affermativo si determini l'immagine dell'endomorfismo $3\mathrm{id}_V - 2\pi$ tramite la simmetria di asse $\ker \Phi$ e direzione $\operatorname{im} \Phi$.

Esercizio 16. Siano V e W due spazi vettoriali reali e siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_3\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$, rispettivamente, basi dei due spazi.

(a) Si determinino le applicazioni lineari $\phi : V \to W$ soddisfacenti alle seguenti condizioni

$$\phi(2v_2-2v_1) = 6w_2+4w_3-2w_4; \qquad \phi(v_2-v_3) = w_1+3w_2-2w_4; \qquad \phi(3v_1-3v_3) = 3w_1-6w_3-3w_4.$$

e si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$ per ciascuna di esse.

(b) Si determini una base dei sottospazi $\ker \phi$ ed $\operatorname{im} \phi$ per ciascuna di tali ϕ e si determinino delle equazioni cartesiane per $\operatorname{im} \phi$ nel caso in cui ϕ non sia iniettiva.

Esercizio 17. Sia $V = U \oplus W$ e siano date le basi $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_4\}$ di U e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$ di W su $\mathbb{R}$. Sia inoltre T il sottospazio di V, $T = \langle u_1 + u_2 - w_1, u_3 - u_4 + w_2 - w_3, u_3 + u_4 + w_1, u_1 - u_2 + w_2 - w_3 \rangle$.

(a) Si determinino equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio T nel sistema di coordinate associato alla base $\mathcal{U} \cup \mathcal{W}$ di V. Si mostri che, per ogni vettore $u \in U$ esiste un unico vettore $u' \in T$ tale che $u' - u$ appartenga a W.

(b) Sia $\phi : U \to W$ l'applicazione che manda il vettore u di U in $u' - u$, ove $u' \in T$ è il vettore descritto nel punto precedente. Si verifichi che ϕ è un'applicazione lineare e se ne scriva la matrice nelle basi date. Si determinino infine nucleo ed immagine di ϕ.

Esercizio 18. Siano V e W spazi vettoriali reali e siano fissate una base, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, di V ed una base, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$, di W.

(a) Si determinino, se esistono, le applicazioni lineari $\phi : V \to W$ che soddisfano alle condizioni

$$\phi(v_2+v_4) = 2w_2-w_3, \quad \phi(v_1-v_4) = -w_1-w_3, \quad \phi(v_1-v_2) = w_1+2w_2, \quad \phi(v_3-v_4) = -2w_1-4w_2,$$

e se ne scriva la matrice nelle basi date. Si determinino inoltre nucleo ed immagine di tali applicazioni.

(b) Sia U uno spazio vettoriale reale di dimensione k ed indichiamo con $\Phi : \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(U, V) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(U, W)$, l'applicazione $\alpha \mapsto \phi \circ \alpha$, ove ϕ è una delle applicazioni descritte nel punto precedente (se esiste). È vero che $\ker \Phi \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(U, \ker \phi)$ e che $\operatorname{im} \Phi \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(U, \operatorname{im} \phi)$? (giustificare le risposte). Si calcoli, in ogni caso, la dimensione dei sottospazi indicati sopra.