Esercizio 1. Risolvere i sistemi lineari $Ax = b$ di matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & -5 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -5 & 2 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & -3 & -1 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right).$$

Esercizio 2. Determinare le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} -tx_1 + (t-1)x_2 + x_3 = 1 \\ (t-1)x_2 + tx_3 = 1 \\ 2x_1 + x_3 = 5 \end{cases}$$

al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Dato l'insieme $S = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda+2 \\ 2\mu+1 \\ 3\mu-1 \\ \lambda-\mu-1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$ determinare un sistema lineare le cui soluzioni coincidano con S. Quante saranno le incognite? Qual è il numero minimo di equazioni necessarie? Se leggiamo S come un piano in $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$, il sistema cercato a cosa corrisponde?

Esercizio 4. Si considerino, al variare di λ tra i numeri reali, i sistemi lineari:

$$\Sigma_\lambda = \begin{cases} (\lambda-1)x + 2y - \lambda z = 0 \\ 2x - z = 0 \\ -(\lambda+1)x - \lambda y + (\lambda+2)z = 0 \end{cases}.$$

(a) Si indichi con S_λ l'insieme delle soluzioni del sistema Σ_λ. Si determini al variare di λ la dimensione del sottospazio S_λ.

(b) Si dica se l'unione dei sottoinsiemi S_λ, al variare di λ, genera tutto $\mathbb{R}^3$. In caso contrario, si determini la dimensione del sottospazio generato da tale unione.

Esercizio 5. Si considerino i sistemi lineari omogenei:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_4 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \lambda x_1 + 2x_2 - 3\lambda x_3 = 0 \\ (\lambda+1)x_1 + 2x_2 - 3\lambda x_3 + x_4 = 0 \\ 2\lambda x_2 - 3x_3 + 2\lambda x_4 = 0 \end{cases}$$

Si determinino i valori di λ per cui i due sistemi ammettono soluzioni non banali in comune.

Esercizio 6. Si considerino, al variare di λ tra i numeri reali, i sistemi lineari:

$$\Sigma_\lambda = \begin{cases} (\lambda-1)x_1 + 2x_2 - \lambda x_3 + 2\lambda x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ -(\lambda+1)x_1 - \lambda x_2 + (\lambda+2)x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + (\lambda-2)x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

(a). Si indichi con S_λ l'insieme delle soluzioni del sistema Σ_λ. Si determini al variare di λ la dimensione del sottospazio S_λ.
(b). Si dica se l'unione dei sottoinsiemi S_λ, al variare di λ, genera tutto $\mathbb{R}^4$. In caso contrario, si determinino le equazioni del sottospazio generato da tale unione.

Esercizio 7. Al variare di λ in $\mathbb{Q}$, si dica quante soluzioni vi sono in $\mathbb{Q}^4$ per il seguente sistema di equazioni lineari

$$\Sigma_\lambda \colon \begin{cases} (\lambda-1)x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0 \\ \lambda x_2 + (\lambda+1)x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_3 + x_4 = 0 \\ (\lambda-1)x_1 + x_4 = 0 \end{cases} .$$

Esercizio 8. Si determinino i valori del parametro t per cui il sistema

$$\Sigma_t \colon \begin{cases} (t+1)x_1 + 2x_2 - tx_4 = 1 \\ (2-t)x_2 + x_3 = 1 \\ (2-t)x_2 + 2tx_4 = 1 \\ (t+1)x_1 + 2x_2 + (2-t)x_3 = 1 \end{cases}$$

ha soluzione.

Per i valori di t per cui il sistema ammette un'unica soluzione, si determini tale soluzione in funzione del parametro t.

Esercizio 9. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino le terne di piani

$$\pi_1(\lambda)\colon y - \lambda x + (\lambda-2)(z+1) = 0, \quad \pi_2(\lambda)\colon (\lambda-1)x + \lambda z = 2, \quad \pi_3(\lambda)\colon x + \lambda y + 2\lambda^2 z = 0,$$

al variare di λ in $\mathbb{R}$.
Si dica per quali valori di λ le intersezioni $\pi_1(\lambda) \cap \pi_2(\lambda)$, $\pi_1(\lambda) \cap \pi_3(\lambda)$, $\pi_2(\lambda) \cap \pi_3(\lambda)$ sono tre rette parallele, a due a due, distinte.

Esercizio 10. Si considerino i sistemi lineari omogenei:

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + x_4 &= 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \lambda x_1 + 3x_2 - (\lambda+1)x_3 &= 0 \\ 2\lambda x_2 + x_3 - \lambda x_4 &= 0 \end{cases} .$$

Si determinino i valori di $\lambda \in \mathbb{C}$ per cui i due sistemi ammettono soluzioni non banali in comune.

Esercizio 11. Due matrici $A, B \in M_{n\times m}(C)$ si dicono *riga-equivalenti* se esiste una matrice invertibile $P \in \mathrm{GL}_n(C)$ tale che $B = PA$. Analogamente, due sistemi di equazioni lineari si dicono *riga-equivalenti* se lo sono le loro matrici complete.

(a) Si verifichi che due sistemi lineari riga-equivalenti hanno lo stesso insieme di soluzioni.

(b) È vero o falso che due matrici $A, B \in M_{n\times m}(C)$ sono riga-equivalenti se, e solo se, i sistemi omogenei $AX = 0$ e $BX = 0$ hanno lo stesso insieme di soluzioni?

(c) È vero o falso che due sistemi non-omogenei di equazioni lineari, $AX = c$ e $BX = d$, sono riga-equivalenti se, e solo se, hanno lo stesso insieme di soluzioni?

Esercizio 12. Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$. Si mostri che l'insieme delle matrici $X \in M_2(\mathbb{Q})$ tali che $AX = XA$ è un sottospazio di $M_2(\mathbb{Q})$, la cui dimensione è uguale a 2 oppure a 4, e quest'ultimo caso accade se, e solo se, A è una matrice scalare ($a = d$ e $b = c = 0$).

Esercizio 13. Siano dati tre spazi vettoriali V, W, Z, di dimensione finita sul campo C, e due applicazioni lineari $\phi\colon V \to W$, $\psi\colon W \to Z$. Si mostri che

(a) $\mathrm{rk}(\psi \circ \phi) = \mathrm{rk}\phi$ se, e solo se, $\ker\psi \cap \mathrm{im}\,\phi = \langle 0 \rangle$;

(b) $\mathrm{rk}(\psi \circ \phi) = \mathrm{rk}\psi$ se, e solo se, $\ker\psi + \mathrm{im}\,\phi = W$.

(c) Si concluda che, dato un endomorfismo $f\colon V \to V$, si ha $\mathrm{rk}(f \circ f) = \mathrm{rk} f$ se, e solo se, $V = \ker f \oplus \mathrm{im}\, f$.

Esercizio 14. Sia B una matrice $m \times n$. Si descriva l'effetto che si ottiene su B, moltiplicando B *a destra* per una matrice elementare di ordine n.

Esercizio 15. Si verifichi che le matrici elementari sono tutte invertibili e che ogni matrice invertibile, ad elementi in un corpo C, è prodotto di un numero finito di matrici elementari.

Esercizio 16. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C e sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Si mostri che $\mathrm{rk}\phi = \dim V$ se, e solo se, esiste un'applicazione lineare $\phi^{-1} : V \to V$, tale che $\phi \circ \phi^{-1} = id_V = \phi^{-1} \circ \phi$.

Esercizio 17. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C e sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Si mostri che sono equivalenti le seguenti affermazioni:

(a) $\mathrm{rk}\phi < \dim V$.

(b) esiste un'endomorfismo $\psi : V \to V$, diverso da 0, tale che $\phi \circ \psi = 0$.

(c) esiste un'endomorfismo $\chi : V \to V$, diverso da 0, tale che $\chi \circ \phi = 0$.

(d) per ogni $\psi : V \to V$, si ha $\phi \circ \psi \neq id_V$.

(e) per ogni $\chi : V \to V$, si ha $\chi \circ \phi \neq id_V$.

Esercizio 18. Cosa resta vero del contenuto degli ultimi due esercizi se V ha dimensione infinita?

* **Esercizio 19.** Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita su C e sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare. Si chiamano rispettivamente *conucleo* e *coimmagine* di ϕ i quozienti $\mathrm{coker}\,\phi = W/\mathrm{im}\,\phi$ e $\mathrm{coim}\,\phi = V/\ker\phi$.

(a) Si dimostri che $\dim \mathrm{coker}\,\phi + \dim \mathrm{coim}\,\phi = \dim W$.

(b) È vero che $\dim V - \dim \ker\phi = \dim W - \dim \mathrm{coker}\,\phi$?

(c) Sia $j : \ker\phi \to V$ l'immersione naturale del sottospazio in V. Si mostri che, per ogni applicazione lineare $\psi : T \to V$ tale che $\phi \circ \psi = 0$ esiste un'unica applicazione lineare $\nu : T \to \ker\phi$ tale che $\psi = j \circ \nu$.

(d) Utilizzare il punto precedente per determinare il nucleo dell'applicazione lineare $h(T, \phi) : \mathrm{Hom}_C(T, V) \to \mathrm{Hom}_C(T, W)$, definita da $\xi \mapsto \phi \circ \xi$.

(e) Sia $p : W \to \mathrm{coker}\,\phi$ la proiezione naturale di W sul quoziente. Si mostri che, per ogni applicazione lineare $\psi : W \to T$ tale che $\psi \circ \phi = 0$ esiste un'unica applicazione lineare $\nu : \mathrm{coker}\,\phi \to T$ tale che $\psi = \nu \circ p$.

(f) Utilizzare il punto precedente per determinare il nucleo dell'applicazione lineare $h(\phi, T) : \mathrm{Hom}_C(W, T) \to \mathrm{Hom}_C(V, T)$, definita da $\xi \mapsto \xi \circ \phi$.

Esercizio 20. È dato un numero dispari di sacchetti contenenti biglie metalliche, tutte uguali tra loro. Sappiamo che, togliendo uno qualsiasi tra i sacchetti, i rimenenti possono essere suddivisi in due gruppi aventi ugual numero di sacchetti ed ugual peso. È vero o falso che ogni sacchetto deve necessariamente contenere lo stesso numero di biglie?

Si consideri lo stesso problema senza l'ipotesi che nei due gruppi vi sia un ugual numero di sacchetti.

Esercizio 21. Sia $B \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$ una matrice di rango k.

(a) Si mostri che, se ${}^tBB = \mathbf{1}_k$, allora $B{}^tB$ è la matrice della proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^n$, dotato dell'usuale prodotto scalare, sul sottospazio generato dalle colonne della matrice B.

(b) In generale, si mostri che $P = B({}^tBB)^{-1}{}^tB$ è la matrice della proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^n$, dotato dell'usuale prodotto scalare, sul sottospazio generato dalle colonne della matrice B.

(c) Si mostri infine che, preso comunque un vettore $b \in \mathbb{R}^k$, il sistema lineare ${}^tBx = b$ ha soluzione e che le soluzioni sono tutti e soli gli elementi $p \in \mathbb{R}^n$ della forma $p = B({}^tBB)^{-1}b + (\mathbf{1}_n - P)y$, al variare di y in $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 22. Unendo il cloro (Cl_2) all'idrossido di potassio (KOH), si ottengono cloruro di potassio (KCl), clorato di potassio ($KClO_3$) e acqua (H_2O). Bilanciare la reazione

$$Cl_2 + KOH \to KCl + KClO_3 + H_2O;$$

ovvero trovare dei numeri naturali $n_1, \dots, n_5$ tali che il numero di atomi di ciascun elemento nel termine di sinistra $n_1Cl_2 + n_2KOH$ sia uguale al numero di atomi di ciascun elemento presente nel termine di destra $n_3KCl + n_4KClO_3 + n_5H_2O$.