

Esercizio 1. Calcolare polinomio caratteristico, autovalori (e loro molteplicità e nullità), autospazi delle seguenti matrici e dire se siano o meno diagonalizzabili. Se sono diagonalizzabili trovare una matrice H tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
$$A_5 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Una matrice reale 2×2 ha sempre almeno un autovettore?

Esercizio 3. Una matrice reale 3×3 ha sempre almeno un autovettore?

Esercizio 4. Una matrice invertibile è sempre diagonalizzabile? Viceversa, una matrice diagonalizzabile è sempre invertibile?

Esercizio 5. Se A è diagonalizzabile, la sua trasposta lo è?

Esercizio 6. Si dimostrino le seguenti affermazioni.

- (a) La relazione di simiglianza è una relazione di equivalenza sull'insieme $M_n(C)$.
- (b) Se $A = a\mathbf{1}_n$ è una matrice scalare, allora la classe di equivalenza di A rispetto alla relazione di simiglianza contiene la sola matrice A .

Esercizio 7. Si consideri l'endomorfismo $\phi: \mathbb{Q}^5 \rightarrow \mathbb{Q}^5$, avente matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico di ϕ , gli autovalori e le rispettive molteplicità e nullità.

Esercizio 8. Si dica se è diagonalizzabile l'endomorfismo ϕ di \mathbb{C}^4 che ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ -10 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica. In caso affermativo, si determini una base di \mathbb{C}^4 costituita da autovettori relativi a ϕ .

Esercizio 9. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C e $\phi: V \rightarrow V$ un endomorfismo. Si mostri che se il polinomio caratteristico di ϕ è prodotto di fattori lineari distinti in $C[X]$, allora ϕ è diagonalizzabile.

Esercizio 10. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C e $\phi: V \rightarrow V$ un endomorfismo. Se $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$, con $\phi(W_j) \subseteq W_j$ per $j = 1, \dots, r$, indichiamo con $\phi_j: W_j \rightarrow W_j$ la restrizione di ϕ al sottospazio W_j . Si dimostri che $p_\phi(X) = p_{\phi_1}(X) \cdots p_{\phi_r}(X)$.

Esercizio 11. Sia $P \in M_2(\mathbb{R})$ una matrice con tutte le entrate positive.

- (a) Si mostri che P ha due autovalori reali distinti.
- (b) Sia λ_1 l'autovalore maggiore di P e si indichi con $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ un autovettore (non-nullo) ad esso relativo. Si mostri che $x_1 x_2 > 0$.
- (c) Sia λ_2 l'autovalore minore di P e si indichi con $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ un autovettore (non-nullo) ad esso relativo. Si mostri che $y_1 y_2 < 0$.

Esercizio 12. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $\phi: V \rightarrow V$ un endomorfismo diagonalizzabile. Dato uno spazio vettoriale T di dimensione n , si consideri l'endomorfismo $\Phi: \text{Hom}(T, V) \rightarrow \text{Hom}(T, V)$ definito da $\Phi(\xi) = \phi \circ \xi$.

- (a) Si dica se Φ è diagonalizzabile e se ne discutano lo spettro, le molteplicità e le nullità in funzione dello spettro di ϕ .

- (b) Si considerino le analoghe domande a proposito dell'endomorfismo $\Psi : \text{Hom}(V, T) \rightarrow \text{Hom}(V, T)$ definito da $\Psi(\xi) = \xi \circ \phi$.

Esercizio 13. Sia V uno spazio vettoriale sul corpo C e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una sua base. Si consideri l'endomorfismo $\phi: V \rightarrow V$ definito dalle condizioni

$$\begin{cases} \phi(v_i) = v_{i+1} & \text{se } 1 \leq i < n \\ \phi(v_n) = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \end{cases}.$$

Si determinino, la matrice di ϕ ed il suo polinomio caratteristico. È vero o falso che il polinomio minimo ed il polinomio caratteristico di ϕ coincidono?

Esercizio 14. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul corpo \mathbb{C} dei numeri complessi. Siano poi Φ un automorfismo di V , N un endomorfismo di V e λ una costante di modulo minore di 1, legati dalla relazione: $\Phi N = \lambda N \Phi$. Si mostri che, sotto tali ipotesi, N è un endomorfismo nilpotente.

Esercizio 15. Data una matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, si indichi con \mathcal{C}_A il sottospazio vettoriale

$$\mathcal{C}_A = \{ X \in M_n(\mathbb{C}) \mid XA = AX \}.$$

- (a) Si mostri che $\dim \mathcal{C}_A = \dim \mathcal{C}_B$ quando A e B sono simili.
- (b) Si mostri che $\mathcal{C}_A = \langle \mathbf{1}, A, \dots, A^{n-1} \rangle$ quando il polinomio caratteristico di A è prodotto di n fattori lineari distinti.

Esercizio 16. Sia $\Delta \in M_n(\mathbb{C})$, una matrice diagonale. Si mostri che ogni matrice diagonale si scrive come combinazione lineare di $\mathbf{1}, \Delta, \dots, \Delta^{n-1}$ se, e solo se, gli autovalori di Δ sono a due a due distinti. [Sugg. Può essere utile ricordare il determinante di Van der Monde.]

Esercizio 17. Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matrice che soddisfa alla condizione $A^2 = A$. Si mostri che $\text{tr} A = \text{rk} A$.

Esercizio 18. Sia $n \geq 3$ e si consideri la matrice $A_n = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, di ordine n , ove

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha & \text{se } |j - i| = 1 \\ \beta & \text{se } j - i = 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ed $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Posto $\delta_n = \det A_n$, si scriva la relazione ricorsiva che governa la successione $(\delta_n)_{n \geq 3}$ e si calcolino i valori iniziali necessari per determinare la successione. Si dica se, per $\alpha = 2$ e $\beta = 4$, la successione $(\delta_n)_{n \geq 3}$ converge in \mathbb{C} .

Esercizio 19. Per quali valori di $t \in \mathbb{C}$ la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & 2 \\ 1 & t & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile? Per tali valori trovare una matrice diagonale simile ad A_t ed una matrice invertibile che realizzi la simiglianza.

Esercizio 20. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 3$ sul campo \mathbb{Q} e sia $\phi: V \rightarrow V$ un endomorfismo tale che $\phi^3 = 3\phi^2$. Si determini, se esiste, una base \mathcal{V} di V tale che ϕ abbia una matrice del tipo $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ r & 0 & B \end{pmatrix}$ con $r \geq 0$ e B una matrice tale che $B^2 = 0$.

Esercizio 21. Sia A una matrice quadrata di ordine n ad elementi in \mathbb{C} .

- (a) Si mostri che se per ogni $i = 1, \dots, n$,

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|,$$

allora A è invertibile.

(b) Si mostri che c è autovalore per A se esiste $i = 1, \dots, n$, per cui

$$|c - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|.$$

Esercizio 22. Sia

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice in $M_n(\mathbb{Q})$ con tutte le entrate uguali ad 1. Dire se è diagonalizzabile e determinare polinomio caratteristico, autovalori e relativi spazi di autovettori.

Esercizio 23. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo C e sia $\phi : V \rightarrow V$ un endomorfismo con autovalori c_1, \dots, c_r . Si mostri che, dato un polinomio $P(X) \in C[X]$, $P(c_1), \dots, P(c_r)$ sono autovalori di $P(\phi)$ e che, se ϕ è diagonalizzabile, lo stesso vale per $P(\phi)$. Vale anche il viceversa?

Esercizio 24. Siano A e B due matrici quadrate di ordine n ad elementi in \mathbb{R} . Se A e B sono simili su \mathbb{C} allora sono simili su \mathbb{R} .

Esercizio 25. Sia $x \in \mathbb{Q}^n$ un vettore (colonna) non nullo e si consideri la matrice $A = \mathbf{1}_n + x^t x$. Dire se A è diagonalizzabile e determinare polinomio caratteristico, autovalori e relativi spazi di autovettori.

Esercizio 26. Date una colonna $c \in \mathbb{Q}^n$ ed una riga $r \in M_{1 \times n}(\mathbb{Q}) = (\mathbb{Q}^n)^*$, che dire della matrice $B = \mathbf{1}_n + cr$?

Esercizio 27. Si dimostri che per ogni coppia di matrici A e B in $M_n(\mathbb{C})$ esiste un vettore non nullo $v \in \mathbb{C}^n$ tale che Av e Bv siano linearmente dipendenti. Lo stesso accade per matrici reali se n è dispari. Che dire se n è pari?

Esercizio 28. Si consideri in \mathbb{R}^4 il sottospazio $W = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 + x_2 - x_4 = 0\}$. Si dica se esiste un endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ soddisfacente a tutte le seguenti condizioni.

- (a) W è autospazio per ϕ .
- (b) ϕ non è diagonalizzabile.
- (c) $\phi(e_2 + e_3) = e_1 - 2e_2$.

Esercizio 29. Al variare di n tra gli interi positivi, si indichi con B_n la matrice quadrata di ordine n del tipo

$$B_n = \begin{pmatrix} 2a & a & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a & 2a & a & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & a & 2a & a & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & a & 2a & a & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & a & 2a & a \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a & 2a \end{pmatrix},$$

ove a è una costante reale. Si scriva in modo esplicito $\delta_n(a) := \det B_n$ quale funzione della variabile a e si dia una condizione necessaria e sufficiente su a affinché esista finito $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(a)$.

Esercizio 30. Sia $P \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice diagonalizzabile. Si mostri che $\mathbf{1} + P^2$ è invertibile.

Esercizio 31. Si determini l'insieme delle matrici reali di ordine 3 che siano simultaneamente antisimmetriche e nilpotenti.