Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 1 Luglio 2016

Nome	Cognome	N. Matricola

ESERCIZIO 1. Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

(a) Si verifichi che 1 e -1 sono autovalori di ϕ. Si determinino polinomio caratteristico e polinomio minimo di ϕ.

(b) Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

(c) Elencare le classi di similitudine di matrici in $M_5(\mathbb{Q})$, aventi lo stesso polinomio caratteristico di A, ed i rispettivi polinomi minimi.

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ col riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ si consideri il piano $\pi : 2x + y = 1$.

(a) Si determinino tutti i punti della retta $r : O + e_1 + \langle e_1 - e_2 + e_3 \rangle$ aventi distanza $\sqrt{5}$ da π.

(b) Si determini la matrice rispetto al sistema di riferimento $\mathscr{R}$ della riflessione σ di asse π. Si determinino le sottovarietà lineari unite per la rigidità σ indicandone le equazioni cartesiane nel sistema di riferimento canonico $\mathscr{R}$.

(c) Si determini, se esiste, un sistema di riferimento $\mathscr{R}'$ diverso da $\mathscr{R}$ tale che $\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\sigma) = \alpha_{\mathscr{R}',\mathscr{R}'}(\sigma)$.

(d) Si determini la matrice di una rotazione ρ di angolo $\theta = \pi/4$ con asse parallelo all'asse delle z orientato nel verso di e_3 tale che l'origine sia un punto unito per la rigidità composta $\tau := \sigma \circ \rho$. Si classifichi la rigidità $\tau := \sigma \circ \rho$.

ESERCIZIO 3. Nello spazio affine $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ col riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O; e_1, \dots, e_4\}$ si considerino le sottovarietà lineari

$$\mathbb{L} : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad \mathbb{M} : x_1 + 2x_2 - x_3 = 5$$

(a) Si determini la posizione reciproca di $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$, la dimensione di $\mathbb{L} \cap \mathbb{M}$ e la dimensione di $\mathbb{L} \vee \mathbb{M}$. Determinare, se esiste, una retta $r \subseteq \mathbb{M}$ che sia sghemba con $\mathbb{L}$. Determinare, se esiste, un piano $\delta \subseteq \mathbb{M}$ che sia sghembo con $\mathbb{L}$.

(b) Determinare la matrice, nel sistema di riferimento $\mathscr{R}$, della trasformazione affine p di proiezione su $\mathbb{M}$ parallelamente a $\langle e_1 \rangle$. Determinare le equazioni cartesiane di $p(\mathbb{L})$.

ESERCIZIO 4. Si consideri $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matrice quadrata ad entrate nel campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$. Si dimostri che ${}^t\overline{\mathbb{A}} \in \mathbb{C}[A]$ (ovvero l'aggiunta di A è polinomiale in A) se e solo se A è una matrice normale.

NON SCRIVERE NELLO SPAZIO SOTTOSTANTE

1	2	3	4