Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 14 Giugno 2016

Nome	Cognome	N. Matricola

ESERCIZIO 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ munito del sistema di riferimento $\mathscr{R} = \{O; e_1, e_2, e_3, e_4\}$ si considerino il piano π e la retta r definiti da:

$$\pi : \begin{cases} x_1 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad r : O + 2e_1 + 3e_3 + 5e_4 + \langle e_2 + 5e_4 \rangle.$$

(a) Si determini la posizione reciproca fra π e r, la reciproca distanza e le coppie di punti di minima distanza.
(b) Determinare tutti i piani σ contenenti la retta r e tali che la distanza tra π e σ coincida con la distanza tra π e r.
(c) Determinare un'equazione cartesiana di un iperpiano τ contenente π e che non intersechi r. Deteminare la proiezione ortogonale della retta r sull'iperpiano τ.
(d) Determinare le equazioni cartesiane di una retta t ortogonale con r, contenuta nel piano π e tale che la distanza tra t e r sia uguale alla distanza tra π e r.

ESERCIZIO 2. Si consideri $\mathbb{E}^3$ munito del sistema di riferimento ortonormale $\mathscr{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$.
(1) Si classifichi secondo Eulero e si determinino le sottovarietà lineari unite della rigidità τ la cui matrice rispetto ad $\mathscr{R}$ è

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1/9 & 8/9 & 4/9 \\ 2 & 8/9 & 1/9 & -4/9 \\ -1 & -4/9 & 4/9 & -7/9 \end{pmatrix}.$$

(2) Si determini un sistema di riferimento destrorso $\mathscr{R}'$ tale che la rigidità τ sia in forma canonica e si determini la matrice associata a τ in tale riferimento.
(3) Si determini un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tale che la traslazione t_v di vettore v commuti con τ (cioé $f := t_v\tau = \tau t_v$) e la rigidità composta f mandi l'asse $k : O + \langle e_1 \rangle$ in una retta $f(k)$ che disti $\sqrt{5}$ da k.
(4) Si determinino, se esistono, due riflessioni σ_1 e σ_2 tali che: $\tau = \sigma_1\sigma_2$ e σ_2 sia una riflessione con asse parallelo al vettore $e_1 - e_3$. In particolare si scrivano le matrici associate a σ_1 e σ_2 rispetto al sistema di riferimento canonico $\mathscr{R}$.

NON SCRIVERE NELLO SPAZIO SOTTOSTANTE

1	2