Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 17 Giugno 2016

Nome	Cognome	N. Matricola

ESERCIZIO 1. Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

(a) Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$. Si scriva la tabella delle dimensioni della filtrazione degli autospazi generalizzati.

(c) Si calcoli la dimensione del $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale $\mathbb{Q}[A]$ e una sua base.

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ col riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ si consideri il piano $\pi : x - y + z = 3$.

(a) Si determini la matrice rispetto al sistema di riferimento $\mathscr{R}$ della riflessione σ di asse π. Si consideri la rigidità $\tau := t_v\sigma$ ottenuta componendo la traslazione t_v di vettore $v = 3e_1$ dopo la riflessione σ. Si determinino una traslazione t_w e una riflessione f (indicandone l'asse e la matrice nel sistema di riferimento canonico $\mathscr{R}$) tali che $t_w f = f t_w = \tau$.

(b) Si determinino le sottovarietà lineari unite per la rigidità $\tau := t_v\sigma$ indicandone le equazioni cartesiane nel sistema di riferimento canonico $\mathscr{R}$.

ESERCIZIO 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ col riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x - 2y + z = 5 \\ x - 7y + z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} y = 1 \\ x - z = -3 \end{cases}$$

(1) Determinare la posizione reciproca tra r e s, la loro intersezione ed equazioni cartesiane per $r \vee s$. Determinare l'angolo formato da r e s e la direzione delle bisettrici.

(2) Determinare la distanza tra l'origine e la retta s. Determinare, se possibile, una retta t sghemba simultaneamente con r e con s.

(3) Determinare una glissoriflessione $g = t_z\sigma$ con t_z traslazione di un vettore z con $\|z\| = 2$ parallela all'asse della riflessione σ tale che $g(r) = s$.

(4) Date due rette incidenti $\alpha : P+\langle u_1\rangle$ e $\beta : P+\langle u_2\rangle$ con $\|u_1\| = \|u_2\| = 1$ esiste sempre una glissoriflessione f tale che $f(\alpha) = \beta$?

NON SCRIVERE NELLO SPAZIO SOTTOSTANTE

1	2	3