Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 19 Settembre 2016

Nome	Cognome	N. Matricola

ESERCIZIO 1. Si consideri $\mathbb{E}^3$ munito del sistema di riferimento ortonormale $\mathscr{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$.

(1) Si classifichi secondo Eulero la rigidità τ la cui matrice rispetto ad $\mathscr{R}$ è

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1/9 & 8/9 & -4/9 \\ -3 & 8/9 & 1/9 & 4/9 \\ -3 & -4/9 & 4/9 & 7/9 \end{pmatrix}.$$

Si scriva τ come composizione di una traslazione t_v con una riflessione ortogonale σ commutanti fra loro (cioè $t_v\sigma = \sigma t_v = \tau$). Tali t_v e σ sono unici? Si determini l'asse di σ.

(2) Si determinino, descrivendole tramite equazioni cartesiane, tutte le sottovarietà lineari unite per τ.

(3) Si determini la matrice nel sistema di riferimento $\mathscr{R}$ della rigidità τ^{-1} e si classifichi τ^{-1}.

(4) Si determini, se esiste, un sistema di riferimento destrorso $\mathscr{R}'$ tale che la matrice associata a τ rispetto a $\mathscr{R}'$ sia:

$$T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^5$ munito del sistema di riferimento ortonormale $\mathscr{R} = \{O; e_1, \dots, e_5\}$ si considerino le sottovarietà lineari

$$\mathbb{L} : \begin{cases} x_2 + x_3 = 2 \\ x_4 - x_5 = 2 \end{cases} \qquad \mathbb{M} : O + e_1 + 2e_5 + \langle 5e_1 - e_2 + e_3, e_4 - e_5 \rangle.$$

(1) Calcolare la dimensione di $\mathbb{L}$, dimensione di $\mathbb{M}$, dimensione di $\mathbb{L} \vee \mathbb{M}$ e dimensione di $\mathbb{L} \cap \mathbb{M}$. Determinare la distanza fra $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ e tutte le coppie di punti di minima distanza.

(2) Determinare, se esistono e in caso affermativo se sono unici, le seguenti sottovarietà lineari:

(a) π di dimensione 3 contenente $\mathbb{M}$ e tale che la distanza tra $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ coincida con la distanza fra $\mathbb{L}$ e π;

(b) un iperpiano τ contenente $\mathbb{M}$ e tale che la distanza tra $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ coincida con la distanza fra $\mathbb{L}$ e τ.

(3) Sia $\sigma : \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$. Determinare una rigidità diretta ρ tale che $\rho(\mathbb{L}) = \sigma$ e $\rho(\sigma) = \mathbb{L}$.

ESERCIZIO 3. Si consideri V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi e $\phi : V \to V$ un endomorfismo di V. Si dimostri che ϕ è un operatore normale se e solo se ${}^t\overline{\phi} \in \mathbb{C}[\phi]$ ove $\mathbb{C}[\phi]$ è l'anello dei polinomi in ϕ a coefficienti in $\mathbb{C}$.

NON SCRIVERE NELLO SPAZIO SOTTOSTANTE

1	2	3