Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 22 Aprile 2016 – Compito **A**

ESERCIZIO 1.
Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

(a) Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

(c) Determinare tutte le matrici di Jordan, non simili fra loro, di ordine 5 aventi lo stesso polinomio minimo di A.

ESERCIZIO 2. Nello spazio affine $\mathbb{A}^4(\mathbb{Q})$ col riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O; e_1, \dots, e_4\}$ si considerino le rette

$$r : O + e_2 + \langle e_1 + e_3 + e_4 \rangle; \qquad s : O + e_1 + \langle e_2 + e_4 \rangle.$$

(a) Si determinino la posizione reciproca di r ed s, la dimensione di $r \cap s$, la dimensione di $r \vee s$ ed equazioni cartesiane della sottovarietà lineare $r \vee s$.

(b) Determinare le equazioni cartesiane di un piano π contenente r e parallelo ad s.

(c) Determinare la matrice nel sistema di riferimento canonico della proiezione su π parallelamente alla direzione $U = \langle e_1, e_2 \rangle$.

(d) Sia $P = O - e_4$ determinare, se possibile, una retta t passante per P tale che $\dim(r \vee t) = \dim(s \vee t) = 2$. Tale t è unica?

(e) Determinare, se possibile, le equazioni cartesiane di un piano σ passante per l'origine e che sia sghembo simultaneamente con r e s.

ESERCIZIO 3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ e consideriamo ϕ un endomorfismo invertibile di V per cui esista un numero naturale $k > 0$ tale che ϕ^k commuti con tutti gli endomorfismi di V.

(1) Dimostrare che un tale ϕ è diagonalizzabile.

(2) Se invece del campo dei numeri complessi consideriamo un campo finito con p elementi è ancora vero che un tale ϕ è diagonalizzabile? (Motivare la risposta con una dimostrazione in caso affermativo o con un contro-esempio in caso negativo).

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 22 Aprile 2016 – Compito **B**

ESERCIZIO 1.

Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

(a) Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

(c) Determinare tutte le matrici di Jordan, non simili fra loro, di ordine 5 aventi lo stesso polinomio minimo di A.

ESERCIZIO 2. Nello spazio affine $\mathbb{A}^4(\mathbb{Q})$ col riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O; e_1, \dots, e_4\}$ si considerino le rette

$$r : O + e_1 + \langle e_2 + e_3 + e_4 \rangle; \qquad s : O + e_2 + \langle e_1 + e_4 \rangle.$$

(a) Si determinino la posizione reciproca di r ed s, la dimensione di $r \cap s$, la dimensione di $r \vee s$ ed equazioni cartesiane della sottovarietà lineare $r \vee s$.

(b) Determinare le equazioni cartesiane di un piano π contenente r e parallelo ad s.

(c) Determinare la matrice nel sistema di riferimento canonico della proiezione su π parallelamente alla direzione $U = \langle e_1, e_2 \rangle$.

(d) Sia $P = O - e_4$ determinare, se possibile, una retta t passante per P tale che $\dim(r \vee t) = \dim(s \vee t) = 2$. Tale t è unica?

(e) Determinare, se possibile, le equazioni cartesiane di un piano σ passante per l'origine e che sia sghembo simultaneamente con r e s.

ESERCIZIO 3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$. Consideriamo ϕ un endomorfismo invertibile di V per cui esista un numero naturale $k > 0$ tale che ϕ^k commuti con tutti gli endomorfismi di V.

(1) Dimostrare che un tale ϕ è diagonalizzabile.

(2) Se invece del campo dei numeri complessi consideriamo un campo finito con p elementi è ancora vero che un tale ϕ è diagonalizzabile? (Motivare la risposta con una dimostrazione in caso affermativo o con un contro-esempio in caso negativo).

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 22 Aprile 2016 – Compito **C**

ESERCIZIO 1.

Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

(a) Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

(c) Determinare tutte le matrici di Jordan, non simili fra loro, di ordine 5 aventi lo stesso polinomio minimo di A.

ESERCIZIO 2. Nello spazio affine $\mathbb{A}^4(\mathbb{Q})$ col riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O; e_1, \dots, e_4\}$ si considerino le rette

$$r : O + e_3 + \langle e_1 + e_2 + e_4 \rangle; \qquad s : O + e_1 + \langle e_3 + e_4 \rangle.$$

(a) Si determinino la posizione reciproca di r ed s, la dimensione di $r \cap s$, la dimensione di $r \vee s$ ed equazioni cartesiane della sottovarietà lineare $r \vee s$.

(b) Determinare le equazioni cartesiane di un piano π contenente r e parallelo ad s.

(c) Determinare la matrice nel sistema di riferimento canonico della proiezione su π parallelamente alla direzione $U = \langle e_1, e_3 \rangle$.

(d) Sia $P = O - e_4$ determinare, se possibile, una retta t passante per P tale che $\dim(r \vee t) = \dim(s \vee t) = 2$. Tale t è unica?

(e) Determinare, se possibile, le equazioni cartesiane di un piano σ passante per l'origine e che sia sghembo simultaneamente con r e s.

ESERCIZIO 3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$. Consideriamo ϕ un endomorfismo invertibile di V per cui esista un numero naturale $k > 0$ tale che ϕ^k commuti con tutti gli endomorfismi di V.

(1) Dimostrare che un tale ϕ è diagonalizzabile.

(2) Se invece del campo dei numeri complessi consideriamo un campo finito con p elementi è ancora vero che un tale ϕ è diagonalizzabile? (Motivare la risposta con una dimostrazione in caso affermativo o con un contro-esempio in caso negativo).

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 22 Aprile 2016 – Compito **D**

ESERCIZIO 1. Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

(a) Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

(c) Determinare tutte le matrici di Jordan, non simili fra loro, di ordine 5 aventi lo stesso polinomio minimo di A.

ESERCIZIO 2. Nello spazio affine $\mathbb{A}^4(\mathbb{Q})$ col riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O; e_1, \dots, e_4\}$ si considerino le rette

$$r : O + e_2 + \langle e_1 + e_3 + e_4 \rangle; \qquad s : O + e_1 + \langle e_2 + e_3 \rangle.$$

(a) Si determinino la posizione reciproca di r ed s, la dimensione di $r \cap s$, la dimensione di $r \vee s$ ed equazioni cartesiane della sottovarietà lineare $r \vee s$.

(b) Determinare le equazioni cartesiane di un piano π contenente r e parallelo ad s.

(c) Determinare la matrice nel sistema di riferimento canonico della proiezione su π parallelamente alla direzione $U = \langle e_1, e_2 \rangle$.

(d) Sia $P = O - e_3$ determinare, se possibile, una retta t passante per P tale che $\dim(r \vee t) = \dim(s \vee t) = 2$. Tale t è unica?

(e) Determinare, se possibile, le equazioni cartesiane di un piano σ passante per l'origine e che sia sghembo simultaneamente con r e s.

ESERCIZIO 3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$. Consideriamo ϕ un endomorfismo invertibile di V per cui esista un numero naturale $k > 0$ tale che ϕ^k commuti con tutti gli endomorfismi di V.

(1) Dimostrare che un tale ϕ è diagonalizzabile.

(2) Se invece del campo dei numeri complessi consideriamo un campo finito con p elementi è ancora vero che un tale ϕ è diagonalizzabile? (Motivare la risposta con una dimostrazione in caso affermativo o con un contro-esempio in caso negativo).