Determinanti

maurizio candilera

October 1, 2018

Introduzione

I determinanti sono uno strumento presente in diversi ambiti della Matematica con svariate applicazioni in molti campi.

In queste slides ci siamo posti lo scopo di dare un'introduzione necessariamente limitata all'argomento pur fornendo una definizione sufficientemente generale e fornendo una dimostrazione per tutti i risultati che vengono introdotti e usati nel seguito.

Lo studente dovrebbe riuscire ad acquisire sia una certa "manualità" nel calcolo di determinanti che gli aspetti più generali che sono alla base di questi calcoli, cercando sempre di cogliere il profondo legame tra gli aspetti teorici e i calcoli espliciti che gli vengono proposti e richiesti.

Definiremo il determinante di un endomorfismo tramite le funzioni multilineari e alternanti su uno spazio vettoriale di dimensione finita e da questo dedurremo la nozione di determinante di una matrice e tutte le proprietà che ci saranno utili nel calcolo esplicito dei determinanti.

Funzioni multilineari alternanti

Cominciamo con le definizioni degli oggetti di cui faremo uso nel seguito.

Definizione (funzione multilineare)

Siano $V_1, \dots, V_k$ e W spazi vettoriali sul campo K. Un'applicazione $F : V_1 \times \dots \times V_k \to W$ si dice *multilineare* se è lineare rispetto a ciascun argomento; ovvero, fissati comunque un indice $i \in \{1, \dots, k\}$ e dei vettori $v_j \in V_j$, per $j \neq i$, l'applicazione $v \mapsto F(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_k)$ è un'applicazione lineare in $\mathrm{Hom}_K(V_i, W)$.

Nel seguito ci interesserà quasi esclusivamente il caso in cui $V_1 = \dots = V_k = V$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita e $W = K$ è il campo di base; e chiameremo *forma k-lineare* una tale funzione quando vorremo sottolineare il numero di fattori nel dominio della funzione.

Definizione (funzione alternante)

Sia k un intero non negativo e V uno spazio vettoriale sul campo K. Un'applicazione $F : V \times \dots \times V \to K$ (k fattori nel dominio) si dice *alternante* se si annulla ogniqualvolta due argomenti sono uguali; ovvero, $F(v_1, \dots, v_k) = 0$ se $v_i = v_j$ per qualche $i \neq j$.

Sia fissato un K-spazio vettoriale V, di dimensione n, e, per ogni intero $k \geq 2$ indichiamo con $A^k(V)$ l'insieme delle forme k-lineari alternanti su V.
Dimostriamo una prima proprietà di queste funzioni ovvero il loro comportamento rispetto alle permutazioni degli argomenti.

Osservazione

Siano fissati un K-spazio vettoriale V di dimensione n e un intero $k \geq 2$. Presa comunque $F \in A^k(V)$ si ha che F cambia di segno se si scambiano le posizioni di due argomenti.

dim. Siano dati nell'ordine $v_1, \dots, v_k$ in V e fissiamo due indici $1 \leq i < j \leq k$. Allora $F(v_1, \dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots v_k) = 0$ perché sono uguali gli argomenti al posto i e al posto j e la funzione è alternante. Inoltre, ricordando che la funzione è anche multilineare, si ha

$$0 = F(v_1, \dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots v_k) = F(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots v_k) + F(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots v_k);$$

e quindi $F(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots v_k) = -F(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots v_k)$. □

In particolare, da ciò discende che, se $F \in A^k(V)$ e $\sigma \in \Sigma_k$ è una permutazione su k oggetti, presi comunque k vettori $v_1, \dots, v_k$ in V, allora

$$F(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = (\mathrm{sgn}\sigma) F(v_1, \dots, v_k).$$

Dall'Osservazione precedente discende il fatto che le forme k-lineari alternanti "riconoscono" la dipendenza lineare tra vettori

Proposizione

Siano fissati un K-spazio vettoriale V di dimensione n, un intero $k \geq 2$, e $F \in A^k(V)$. Allora $F(v_1, \dots, v_k) = 0$ se $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente dipendenti in V.

dim. Siano $v_1, \dots, v_k$ in V linearmente dipendenti. Allora uno dei vettori si scrive come combinazione lineare dei precedenti e non è restrittivo supporre che sia v_k; ovvero sia $v_k = c_1 v_1 + \cdots + c_{k-1} v_{k-1}$. Allora

$$F(v_1, \dots, v_k) = F\left(v_1, \dots, v_{k-1}, \sum_{i=1}^{k-1} c_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k-1} c_i F(v_1, \dots, v_{k-1}, v_i) = 0,$$

perché in ogni addendo c'è un argomento ripetuto. □

Questa proprietà delle forme multilineari alternanti le determina rigidamente. In particolare, se $k > n = \dim_K V$ e $F \in A^k(V)$, allora $F(v_1, \dots, v_k) = 0$ per ogni scelta di vettori $v_1, \dots, v_k$ in V, perché linearmente dipendenti. Inoltre

Proposizione

Siano V un K-spazio vettoriale V di dimensione n e $2 \leq k \leq n$ un intero. L'insieme $A^k(V)$ è un K-spazio vettoriale di dimensione $\binom{n}{k}$.

Diamo la dimostrazione della Proposizione nel caso in cui $k = n$. Nel caso generale, la dimostrazione procede in modo analogo, ma richiede ulteriori precisazioni sulle notazioni. Chi vuole, può trovarla nei fogli di esercizi o nel libro.

dim. La funzione identicamente nulla $0 : V \times \cdots \times V \to K$ è multilineare e alternante qualunque sia il numero dei fattori nel prodotto cartesiano. In particolare, è l'*unica* funzione con tali proprietà se il numero dei fattori supera la dimensione dello spazio vettoriale V. La somma di due funzioni in $A^k(V)$ è ancora in $A^k(V)$, così come il prodotto di una tale funzione per uno scalare $c \in K$; per cui $A^k(V)$ è un sottospazio dello spazio vettoriale di tutte le funzioni $\mathscr{F}(V \times \cdots \times V, K)$.
Fissiamo una base (ordinata) $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V e sia data una forma n-lineare alternante $D \in A^n(V)$ vogliamo mostrare come D sia completamente determinata dal valore $D(v_1, \dots, v_n)$ sugli elementi della base.
Presi comunque n vettori $w_1, \dots, w_n$, in V, si ha

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} v_i = a_{1j} v_1 + \cdots + a_{nj} v_n, \quad \text{per } j = 1, \dots, n;$$

quindi, ricordando che D è multilineare, si ha

$$D(w_1, \dots, w_n) = D\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1} v_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n,n} v_{i_n} \right) = \sum_{1 \le i_1, \dots, i_n \le n} a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n} D(v_{i_1}, \dots, v_i$$

Ricordando che D è alternante, si ha $D(v_{i_1}, \dots, v_{i_n}) = 0$ se due indici sono ripetuti, per cui gli unici addendi che possono assumere un valore non nullo sono quelli per cui $\{\, i_1, \dots, i_n \,\} = \{\, 1, \dots, n \,\}$, ovvero $1 \mapsto i_1, \dots, n \mapsto i_n$ è una permutazione $\sigma \in \Sigma_n$. Inoltre, si ha $D(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = (\operatorname{sgn}\sigma) D(v_1, \dots, v_n)$; per cui possiamo scrivere

$$D(w_1, \dots, w_n) = \left(\sum_{\sigma \in \Sigma_n} (\operatorname{sgn}\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \right) D(v_1, \dots, v_n). \tag{1}$$

Dunque $D \in A^n(V)$ è completamente determinata dal valore $D(v_1, \dots, v_n)$. [segue]

[continua]. Dunque $D \in A^n(V)$ è completamente determinata dal valore $D(v_1, \dots, v_n)$ e vogliamo dedurre che $\dim_K A^n(V) = 1 = \binom{n}{n}$. Per quanto visto, se $D(v_1, \dots, v_n) = 0$, allora $D(w_1, \dots, w_n) = 0$ per ogni n-upla di vettori, ovvero $D = 0$. Fissata $D \neq 0$ e presa comunque F in $A^n(V)$, si ponga

$$c = \frac{F(v_1, \dots, v_n)}{D(v_1, \dots, v_n)} \in K.$$

Per ogni n-upla di vettori $w_1, \dots, w_n$, si ha

$$\begin{aligned} F(w_1, \dots, w_n) &= \left(\sum_{\sigma \in \Sigma_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \right) F(v_1, \dots, v_n) = \\ &= c \left(\sum_{\sigma \in \Sigma_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \right) D(v_1, \dots, v_n) = cD(w_1, \dots, w_n); \end{aligned}$$

ovvero $F = cD$, da cui si deduce che $A^n(V) = \langle D \rangle$, ove D è un qualunque elemento non nullo di quello spazio vettoriale; ovvero $\dim_K A^n(V) = 1$. □

Dalla dimostrazione discende che, data $0 \neq D \in A^n(V)$, allora $D(v_1, \dots, v_n) \neq 0$ se, e solo se, $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V.
Abbiamo quanto ci serve per poter definire il determinante di un endomorfismo e ricavare le sue proprietà fondamentali.

Determinante di un endomorfismo

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo K e $\phi : V \to V$ un'applicazione lineare. Fissata comunque una base ordinata $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V e una forma n-lineare non nulla $0 \neq D \in A^n(V)$, il *determinante* di ϕ è lo scalare

$$\det \phi = \frac{D(\phi(v_1), \dots, \phi(v_n))}{D(v_1, \dots, v_n)}.$$

Osserviamo come prima cosa che il valore del determinante non dipende né dalla scelta della forma multilineare, né dalla scelta della base, ma solo dall'endomorfismo ϕ. Infatti,

- se $0 \neq G \in A^n(V)$, allora $G = cD$ per un opportuno scalare $c \in K \smallsetminus \{0\}$ e quindi
$$\frac{G(\phi(v_1), \dots, \phi(v_n))}{G(v_1, \dots, v_n)} = \frac{cD(\phi(v_1), \dots, \phi(v_n))}{cD(v_1, \dots, v_n)} = \frac{D(\phi(v_1), \dots, \phi(v_n))}{D(v_1, \dots, v_n)} = \det \phi.$$
- Inoltre, fissata $0 \neq D \in A^n(V)$, poiché ϕ è un'applicazione lineare, l'applicazione $D^\phi : (w_1, \dots, w_n) \mapsto D(\phi(w_1), \dots, \phi(w_n))$ è in $A^n(V)$ e quindi esiste uno scalare $\delta \in K$, tale che $D^\phi = \delta D$ e questo scalare δ è $\det \phi$, che può essere calcolato prendendo il rapporto
$$\delta = \frac{D^\phi(v_1, \dots, v_n)}{D(v_1, \dots, v_n)} = \frac{D(\phi(v_1), \dots, \phi(v_n))}{D(v_1, \dots, v_n)} = \det \phi$$
su qualsiasi base ordinata $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V.

Possiamo enunciare e dimostrare le proprietà fondamentali del determinante.

Teorema

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo K Allora

(a) Un'applicazione lineare $\phi : V \to V$ è invertibile se, e solo se, $\det \phi \neq 0$.

(b) (Binet) Date ϕ e ψ in $\mathrm{Hom}_K(V, V)$, allora $\det(\phi \circ \psi) = (\det \phi)(\det \psi)$.

dim. (*a*) Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V; allora $\det \phi \neq 0$ se, e solo se, $D(\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)) \neq 0$; ovvero se, e solo se, $\{ \phi(v_1), \dots, \phi(v_n) \}$ è una base di V. Un'applicazione lineare è invertibile se, e solo se, manda una base in una base.

(*b*) Siano date, una base ordinata $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V e $0 \neq D \in A^n(V)$. Per definizione, si ha

$$\det(\phi \circ \psi) = \frac{D(\phi(\psi(v_1)), \dots, \phi(\psi(v_n)))}{D(v_1, \dots, v_n)}.$$

Se $\psi(v_1), \dots, \psi(v_n)$ sono linearmente dipendenti, allora $\det \psi = 0$ e, inoltre, poiché ϕ è lineare, i vettori $\phi(\psi(v_1)), \dots, \phi(\psi(v_n))$ sono anch'essi linearmente dipendenti e quindi anche $\det(\phi \circ \psi) = 0$ e la formula è verificata.
Se, invece $\psi(v_1), \dots, \psi(v_n)$ sono linearmente indipendenti, sono una base di V e $D(\psi(v_1), \dots, \psi(v_n)) \neq 0$; per cui si ha

$$\det(\phi \circ \psi) = \frac{D(\phi(\psi(v_1)), \dots, \phi(\psi(v_n)))}{D(\psi(v_1), \dots, \psi(v_n))} \frac{D(\psi(v_1), \dots, \psi(v_n))}{D(v_1, \dots, v_n)} = (\det \phi)(\det \psi);$$

perché $\det \phi$ non dipende dalla base utilizzata per calcolarlo. $\square$

Determinante di una matrice

Possiamo definire il determinante di una matrice a elementi in un campo.

Definizione (determinante di una matrice)

Sia $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in M_n(K)$. Il *determinante* della matrice A è il determinante dell'endomorfismo $\phi : K^n \to K^n$ di matrice A in base canonica, ovvero tale che $A = \alpha_{\mathcal{E}_n,\mathcal{E}_n}(\phi)$.

Ricordiamo che, se $A = \alpha_{\mathcal{E}_n,\mathcal{E}_n}(\phi)$, allora $\phi(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$ per $j = 1, \dots, n$. Fissata (comunque) $0 \neq D \in A^n(K^n)$, per quanto visto sulle applicazioni multilineari alternanti (cf. 1), si ha

$$\boxed{\det A = \det \phi = \frac{D(\phi(e_1), \dots, \phi(e_n))}{D(e_1, \dots, e_n)} = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} (\mathrm{sgn}\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}.}$$

Si noti che avremmo potuto anche prendere un qualsiasi spazio vettoriale V su K, una sua base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$, e l'endomorfismo $\psi : V \to V$ di matrice $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\psi)$ e avremmo ancora $\det \psi = \det A$.

Dalle proprietà del determinante di un endomorfismo discende immediatamente che

- $A \in M_n(K)$ è invertibile se, e solo se, $\det A \neq 0$.
- (Binet) Per ogni A e B in $M_n(K)$, si ha $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

Inoltre, per ogni permutazione $\sigma \in \Sigma_n$ si ha

$$a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} = a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = (\operatorname{sgn}\sigma)^{-1} = \operatorname{sgn}\sigma.$$

La prima uguaglianza perché una permutazione è una biiezione e il prodotto di scalari è commutativo. La seconda perché $\operatorname{sgn} : \Sigma_n \to \{\pm 1\}$ è un omomorfismo di gruppi e ± 1 coincide col proprio inverso (moltiplicativo).
Al variare di $\sigma \in \Sigma_n$, anche σ^{-1} percorre tutto il gruppo, per cui, possiamo scrivere

$$\det A = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} (\operatorname{sgn}\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} =$$

$$= \sum_{\sigma \in \Sigma_n} (\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})) a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)} = \det {}^tA;$$

ovvero, $\boxed{\det A = \det {}^tA, \text{ per ogni } A \in M_n(K)}$.

Data $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(K)$, scriveremo anche $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$, per indicare $\det A$.

Esempio: Calcoliamo $\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right| = \det \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$.

Svolg.: Per calcolare il determinante di una matrice di ordine n, ci serve una base di uno spazio vettoriale di dimensione n e una forma n-lineare non nulla sullo stesso spazio. Prendiamo quindi la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ di K^2 e sia $0 \neq D \in A^2(K^2)$. Allora

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \frac{D(ae_1 + ce_2,\, be_1 + de_2)}{D(e_1, e_2)}$$

e il numeratore della frazione, per multilinearità e alternanza è

$$\begin{aligned} D(ae_1 + ce_2,\, be_1 + de_2) &= aD(e_1, be_1 + de_2) + cD(e_2, be_1 + de_2) = \\ &= adD(e_1, e_2) + bcD(e_2, e_1) = \\ &= (ad - bc)D(e_1, e_2); \end{aligned}$$

dunque $\boxed{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc}$. $\square$

Esempio: Calcoliamo $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Svolg.: Per calcolare il determinante di una matrice di ordine n, ci serve una base di uno spazio vettoriale di dimensione n e una forma n-lineare non nulla sullo stesso spazio. Prendiamo la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ di K^3 e $0 \neq D \in A^3(K^3)$. Allora il determinante della matrice è

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{D(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3,\ a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3,\ a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3)}{D(e_1, e_2, e_3)}.$$

Sviluppiamo il numeratore usando multinearità e alternanza e osserviamo che il vettore di base che compare come argomento può essere cancellato dalle somme negli argomenti successivi. Dunque il numeratore è uguale a

$$a_{11}D(e_1, a_{22}e_2 + a_{32}e_3, a_{23}e_2 + a_{33}e_3) + a_{21}D(e_2, a_{12}e_1 + a_{32}e_3, a_{13}e_1 + a_{33}e_3) +$$
$$+ a_{31}D(e_3, a_{12}e_1 + a_{22}e_2, a_{13}e_1 + a_{23}e_2) =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33}D(e_1, e_2, e_3) + a_{11}a_{32}a_{23}D(e_1, e_3, e_2) + a_{21}a_{12}a_{33}D(e_2, e_1, e_3) + a_{21}a_{32}a_{13}D(e_2, e_3, e_1$$
$$+ a_{31}a_{12}a_{23}D(e_3, e_1, e_2) + a_{31}a_{22}a_{13}D(e_3, e_2, e_1$$
$$= \Big(a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}\Big) D(e_1, e_2, e_3),$$

dove abbiamo usato il fatto che $D(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)}) = (\operatorname{sgn}\sigma) D(e_1, e_2, e_3)$ per ogni $\sigma \in \Sigma_3$. Si conclude che

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}}.$$

□

Esempio : Calcoliamo $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Svolg.: Per calcolare il determinante di una matrice di ordine n, ci serve una base di uno spazio vettoriale di dimensione n e una forma n-lineare non nulla sullo stesso spazio. Prendiamo la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$ di $\mathbb{Q}^4$ e $0 \neq D \in A^4(\mathbb{Q}^4)$ e il determinante della matrice è

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{D(2e_1 - 3e_3,\ e_1 + e_2 - e_4,\ -e_2 + 2e_3,\ -2e_1 + 3e_3 + e_4)}{D(e_1, e_2, e_3, e_4)}.$$

Sviluppiamo il numeratore usando multinearità e alternanza facendo tesoro delle osservazioni fatte nei casi precedenti. Si ha quindi

$$\begin{aligned} &D(2e_1 - 3e_3,\ e_1 + e_2 - e_4,\ -e_2 + 2e_3,\ -2e_1 + 3e_3 + e_4) = \\ &\qquad = 2D(e_1,\ e_2 - e_4,\ -e_2 + 2e_3,\ 3e_3 + e_4) - 3D(e_3,\ e_1 + e_2 - e_4,\ -e_2,\ -2e_1 + e_4) = \\ &\qquad = 4D(e_1, e_2, e_3, e_4) + 6D(e_1, e_4, e_2, e_3) + 3D(e_3, e_1, e_2, e_4) + 6D(e_3, e_4, e_2, e_1) = \\ &\qquad = (4 + 6 + 3 - 6)D(e_1, e_2, e_3, e_4). \end{aligned}$$

Si conclude che il determinante cercato è uguale a 7. $\square$

Gruppo lineare speciale

Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo K, dalle proprietà del determinante discende che il gruppo lineare generale coincide con

$$\mathrm{GL}(V) = \{\, \phi \in \mathsf{Hom}_K(V,V) \mid \det\phi \neq 0 \,\}$$

e l'applicazione $\phi \mapsto \det\phi$ è un omomorfismo di gruppi, $\det : \mathrm{GL}(V) \to K^\times$, nel gruppo moltiplicativo del campo (Binet).
Il nucleo di questo omomorfismo è detto il *gruppo lineare speciale*, ovvero

$$\boxed{\mathrm{SL}(V) = \{\, \phi \in \mathrm{GL}(V) \mid \det\phi = 1 \,\} \qquad \text{[gruppo lineare speciale].}}$$

Anche in questo caso, fissata una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V, si ha un isomorfismo di gruppi $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}} : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(n,K)$, ove $\mathrm{GL}(n,K) = \{\, A \in M_n(K) \mid \det A \neq 0 \,\}$. Si ha l'analogo omomorfismo di gruppi moltiplicativi, $\det : \mathrm{GL}(n,K) \to \mathrm{GL}(1,K)$, il cui nucleo è

$$\boxed{\mathrm{SL}(n,K) = \{\, A \in M_n(K) \mid \det A = 1 \,\} \qquad \text{[gruppo lineare speciale].}}$$

Esempio : Sia $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K)$ una matrice *triangolare superiore*, ovvero tale che, per $1 \leq i, j \leq n$ si abbia $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$. Allora il suo determinante è il prodotto degli elementi della diagonale principale, ovvero

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Svolg.: Prendiamo la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ di K^n e $0 \neq D \in A^n(K^n)$ e sia $\phi : K^n \to K^n$ l'endomorfismo di matrice A in base canonica. Allora $\det A = \det \phi = \frac{D(\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n))}{D(e_1, \ldots, e_n)}$.
Poiché A è triangolare superiore, per ogni $j = 1, \ldots, n$, si ha $\phi(e_j) \in \langle e_1, \ldots, e_j \rangle$; ovvero

$$\phi(e_1) = a_{11}e_1, \quad \phi(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2, \quad \ldots, \quad \phi(e_n) = a_{1n}e_1 + \cdots + a_{nn}e_n;$$

Sviluppiamo dunque il numeratore della frazione che calcola il determinante usando multinearità e alternanza. Poiché nel primo argomento compare il solo vettore e_1, possiamo cancellare questo addendo da tutti gli argomenti successivi, perché nello sviluppo per multilinearità darebbero origine ad addendi nulli (una funzione alternante si annulla se due argomenti sono uguali). Si ha quindi

$$D(a_{11}e_1,\, a_{12}e_1 + a_{22}e_2,\, \ldots,\, a_{1n}e_1 + \cdots + a_{nn}e_n) = D(a_{11}e_1,\, a_{22}e_2,\, a_{23}e_2 + a_{33}e_3,\, \ldots,\, a_{2n}e_2 + \cdots + a$$

Allo stesso modo, ora nel secondo argomento compare il solo vettore e_2 e perciò possiamo cancellare questo addendo da tutti gli argomenti successivi. Continuando allo stesso modo, si conclude che

$$D(\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n)) = D(a_{11}e_1,\, a_{22}e_2,\, a_{33}e_3,\, \ldots,\, a_{nn}e_n) = \left[\prod_{i=1}^{n} a_{ii}\right] D(e_1, \ldots, e_n).$$

Esempio : Calcoliamo il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -8 & 5 \\ -3 & 2 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

Svolg.: Per farlo ci occorre uno spazio vettoriale V, di dimensione 4, una sua base (ordinata) $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ e un'applicazione multilineare non nulla $D \in A^4(V)$ e $\det A = \det \phi$, ove $\phi : V \to V$ è l'unico endomorfismo tale che $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = A$. Ad esempio, possiamo prendere $\mathbb{R}^4$, con la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$ e una qualsiasi $D \neq 0$. Si ha quindi

$$\det A = \frac{D(2e_1 - 3e_2, -e_1 + 2e_2, -8e_1 + 12e_2 + 2e_3 + 2e_4, 5e_1 - 4e_2 + e_3 + 3e_4)}{D(e_1, e_2, e_3, e_4)}.$$

Utilizzando il fatto che D è multilineare e alternante, si ricava come nei casi precedenti

$$\begin{aligned} D(2e_1 - 3e_2, -e_1 + 2e_2, -8e_1 + 12e_2 + e_3 + 2e_4, 5e_1 - 4e_2 + e_3 + 3e_4) &= \\ = 4D(e_1, e_2, 2e_3 + 2e_4, e_3 + 3e_4) + 3D(e_2, e_1, 2e_3 + 2e_4, e_3 + 3e_4) &= \\ = D(e_1, e_2, 2e_3 + 2e_4, e_3 + 3e_4) &= \\ = 6D(e_1, e_2, e_3, e_4) + 2D(e_1, e_2, e_4, e_3) &= \\ = 4D(e_1, e_2, e_3, e_4); & \end{aligned}$$

Ovvero $\det A = 4$; e si osservi che si ha $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -8 & 5 \\ -3 & 2 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$. [segue]

[continua]
L'osservazione non è casuale. Infatti, il determinante si sarebbe potuto calcolare più rapidamente osservando che, sempre in base alla multilinearità e alternanza di D, si ha

$$\frac{D(2e_1-3e_2,-e_1+2e_2,-8e_1+12e_2+2e_3+2e_4,5e_1-4e_2+e_3+3e_4)}{D(e_1,e_2,e_3,e_4)}=$$
$$=\frac{D(2e_1-3e_2,-e_1+2e_2,2e_3+2e_4,e_3+3e_4)}{D(e_1,e_2,2e_3+2e_4,e_3+3e_4)}\,\frac{D(e_1,e_2,2e_3+2e_4,e_3+3e_4)}{D(e_1,e_2,e_3,e_4)};$$

e i due fattori sono

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=\frac{D(2e_1-3e_2,-e_1+2e_2,2e_3+2e_4,e_3+3e_4)}{D(e_1,e_2,2e_3+2e_4,e_3+3e_4)}$$
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=\frac{D(e_1,e_2,2e_3+2e_4,e_3+3e_4)}{D(e_1,e_2,e_3,e_4)}.$$

Infatti, $D(-,-,2e_3+2e_4,e_3+3e_4)$ (le ultime due entrate fissate e solo le prime due variabili) è un'applicazione bilineare alternante non nulla sul sottospazio $\langle e_1,e_2\rangle$ e ϕ, ristretta a tale sottospazio, è un endomorfismo; ugualmente, $D(e_1,e_2,-,-)$ (le prime due entrate fissate e solo le ultime due variabili) è un'applicazione bilineare alternante non nulla sul sottospazio $\langle e_3,e_4\rangle$ e, $e_3\mapsto 2e_3+2e_4$, $e_4\mapsto e_3+3e_4$, definisce un endomorfismo di quel sottospazio.
Dunque, il fatto che la matrice si presentasse "a blocchi", ovvero $\phi(\langle e_1,e_2\rangle)\subseteq\langle e_1,e_2\rangle$, ha permesso ridurre il calcolo del determinante al prodotto dei determinanti dei singoli blocchi. Ovvero, come abbiamo osservato sopra

$$\boxed{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -8 & 5 \\ -3 & 2 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}$$

Determinante di una matrice a blocchi

Vogliamo generalizzare quanto visto nell'esempio precedente.

Proposizione

Siano $1 \le k < n$ e $M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ 0 & C \end{smallmatrix}\right) \in M_n(K)$ una matrice a blocchi, ove $A \in M_k(K)$, $B \in M_{k\times(n-k)}(K)$, $C \in M_{n-k}(K)$. Allora $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = (\det A)(\det C)$.

dim. Per calcolare un determinante di ordine n ci servono, uno spazio vettoriale V di dimensione n, una sua base (ordinata) $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e una forma n-lineare alternante $0 \neq D \in A^n(V)$. Sia $\phi : V \to V$ l'endomorfismo per cui $M = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ e siano $U = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$, $W = \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle$, per cui $V = U \oplus W$ e $\phi(U) \subseteq U$. In particolare, A è la matrice nella base $\{v_1, \dots, v_k\}$ della restrizione $\phi_{|U}$ che è un endomorfismo di U. Osserviamo subito che, se $\phi(v_1), \dots, \phi(v_k)$ sono linearmente dipendenti, allora $\det A = \det(\phi_{|U})$ e $\det M = \det \phi$ sono entrambi nulli, per cui la tesi è verificata in questo caso.
Possiamo supporre quindi che $\phi(v_1), \dots, \phi(v_k)$ siano una base di U e osserviamo che

$$\text{per } j = k+1, \dots, n, \quad \phi(v_j) = u_j + w_j, \quad \text{ove } u_j = \sum_{i=1}^{k} b_{ij} v_i \in U \quad \text{e} \quad w_j = \sum_{i=k+1}^{n} c_{ij} v_i \in W;$$

per cui $u_j \in \langle \phi(v_1), \dots, \phi(v_k) \rangle$ per $j = k+1, \dots, n$. [segue]

[continua]
Dunque, poiché D è multilineare e si annulla su vettori linearmente dipendenti, si ha

$$\begin{aligned}\det M = \det\phi &= \frac{D(\phi(v_1),\dots,\phi(v_k),u_{k+1}+w_{k+1},\dots,u_n+w_n)}{D(v_1,\dots,v_n)} = \\ &= \frac{D(\phi(v_1),\dots,\phi(v_k),w_{k+1},\dots,w_n)}{D(v_1,\dots,v_n)} = \\ &= \frac{D(\phi(v_1),\dots,\phi(v_k),w_{k+1},\dots,w_n)}{D(\phi(v_1),\dots,\phi(v_k),v_{k+1},\dots,v_n)}\,\frac{D(\phi(v_1),\dots,\phi(v_k),v_{k+1},\dots,v_n)}{D(v_1,\dots,v_n)};\end{aligned}$$

ove le frazioni hanno senso, perché $\{\,\phi(v_1),\dots,\phi(v_k),v_{k+1},\dots,v_n\,\}$ è una base di $V = U \oplus W$ e D non si annulla su una base. Poiché la forma k-lineare non-nulla $(x_1,\dots,x_k) \mapsto D(x_1,\dots,x_k,v_{k+1},\dots,v_n)$ appartiene ad $A^k(U)$, si ha

$$\det A = \det(\phi_{|U}) = \frac{D(\phi(v_1),\dots,\phi(v_k),v_{k+1},\dots,v_n)}{D(v_1,\dots,v_n)}.$$

La forma $(n-k)$-lineare non-nulla
$(y_{k+1},\dots,y_n) \mapsto D(\phi(v_1),\dots,\phi(v_k),y_{k+1},\dots,y_n)$ appartiene ad $A^{n-k}(W)$, e C è la matrice dell'endomorfismo $\psi : W \to W$ definito da $v_j \mapsto w_j$ per $j = k+1,\dots,n$.
Dunque,

$$\det C = \det\psi = \frac{D(\phi(v_1),\dots,\phi(v_k),w_{k+1},\dots,w_n)}{D(\phi(v_1),\dots,\phi(v_k),v_{k+1},\dots,v_n)};$$

e la dimostrazione è conclusa. □

Determinante di matrici elementari

Abbiamo visto che

- il determinante di una matrice triangolare è il prodotto degli elementi sulla diagonale.
- Una matrice triangolare è, in particolare, una matrice a scala e, con operazioni di Gauss (sulle righe) possiamo portare qualunque matrice in una forma a scala.
- Fare operazioni elementari sulle righe di una matrice A corrisponde a moltiplicare A a sinistra per matrici elementari e il determinante di un prodotto è il prodotto dei determinanti (Binet).

Dunque, possiamo calcolare il determinante di una matrice $A \in M_n(K)$ portandola in forma triangolare con operazioni elementari e tenendo traccia dei determinanti delle operazioni elementari fatte per portarla in tale forma.

Le matrici delle operazioni elementari sulla base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ sono le seguenti:

- scambio tra v_i e v_j, matrice $H(i,j) = \mathbf{1}_n + (\varepsilon(i,j) + \varepsilon(j,i) - \varepsilon(i,i) - \varepsilon(j,j))$, $\boxed{\det H(i,j) = -1}$;
- moltiplicazione di v_i per $c \neq 0$, matrice $D(j,c) = \mathbf{1}_n + (c-1)\varepsilon(i,i)$ e $\boxed{\det D(j,c) = c}$;
- sommare a v_i il vettore av_j con $j \neq i$ e $a \in K$, matrice $E(i,j,a) = \mathbf{1}_n + a\varepsilon(i,j)$ e $\boxed{\det E(i,j,a) = 1}$;

ove $\mathcal{B} = \{\ \varepsilon(i,j) \mid 1 \leq i,j \leq n\ \}$ è la base canonica di $M_n(K)$.

Si osservi che, al fine di calcolare il determinante, le operazioni elementari possono essere fatte sia sulle righe che sulle colonne della matrice.

Esempio: Usiamo le operazioni elementari per calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -3 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{Q}).$$

Svolg.: Con operazioni elementari portiamo la matrice A in forma triangolare:

$$\det A = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -3 & -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{array}{r|rrrrr|} -III & 1 & -1 & 1 & 2 & -3 \\ & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ I-3III-II & 0 & 0 & 3 & 9 & -9 \\ IV-4III & 0 & 0 & 4 & 13 & -12 \\ V+3III & 0 & 0 & -5 & -5 & 13 \end{array} =$$

$$= \begin{array}{r|rrrrr|} & 1 & -1 & 1 & 2 & -3 \\ & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 3 & 9 & -9 \\ IV-(4/3)III & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ V+(5/3)III & 0 & 0 & 0 & 10 & -2 \end{array} = \begin{array}{r|rrrrr|} & 1 & -1 & 1 & 2 & -3 \\ & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 3 & 9 & -9 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ V-10IV & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} = -12.$$

Si osservi che, a parte lo scambio tra la prima e la terza riga, che ha prodotto un cambio di segno, bilanciato dalla moltiplicazione per -1 della riga scambiata, tutte le altre operazioni elementari effettuate hanno determinante 1 e quindi han lasciato invariato il determinante. $\square$

Esempio : Vogliamo mostrare il calcolo del *determinante di Vandermonde*, ovvero

$$V_n(x_0,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & & & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & & & x_n^2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0\le i<j\le n} (x_j - x_i).$$

Svolg.: Facciamo induzione sull'intero n. Per $n = 1$: $V(x_0, x_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_0 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_0$; e la tesi è verificata.

Supponiamo vera la tesi per $n-1$ variabili e operiamo sulle righe del determinante $V_n(x_0,\dots,x_n)$ sottraendo ad ogni riga, a partire dalla seconda, la riga soprastante moltiplicata per x_0. Sono tutte operazioni con determinante 1, per cui

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & & & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & & & x_n^2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & x_1-x_0 & & & x_n-x_0 \\ 0 & x_1(x_1-x_0) & & & x_n(x_n-x_0) \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & x_1^{n-1}(x_1-x_0) & \dots & \dots & x_n^{n-1}(x_n-x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1-x_0 & \dots & \dots & x_n-x_0 \\ x_1(x_1-x_0) & & & x_n(x_n-x_0) \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-1}(x_1-x_0) & \dots & \dots & x_n^{n-1}(x_n-x_0) \end{vmatrix};$$

ove abbiamo usato la formula per il determinante di una matrice a blocchi. Ricordando che il determinante è una funzione multilineare delle colonne, possiamo raccogliere i fattori $(x_1 - x_0)\cdots(x_n - x_0)$ e ottenere

$$V_n(x_0,\dots,x_n) = (x_1 - x_0)\cdots(x_n - x_0) \begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ x_1 & & & x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \dots & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix};$$

ovvero $V_n(x_0,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^n (x_i - x_0) V_{n-1}(x_1,\dots,x_n)$. Applicando l'ipotesi induttiva, si conclude.
□

Formula di Laplace

Sia $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K)$ e sia $\phi : K^n \to K^n$ l'endomorfismo di matrice $A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi)$ in base canonica. Sia fissata poi $0 \neq D \in \mathcal{A}^n(K^n)$. In particolare, si ha $\phi(e_1) = a_{11}e_1 + \cdots + a_{n1}e_n$, per cui

$$\det A = \det \phi = \frac{D(\phi(e_1), \dots, \phi(e_n))}{D(e_1, \dots, e_n)} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \frac{D(e_i, \phi(e_2), \dots, \phi(e_n))}{D(e_1, \dots, e_n)}.$$

Scritto in altro modo:

$$\det A = a_{1,1} \begin{vmatrix} 1 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + a_{2,1} \begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 1 & a_{2,2} & & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \cdots + a_{n,n} \begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & & a_{n-1,n} \\ 1 & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{1,1} \begin{vmatrix} 1 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} - a_{2,1} \begin{vmatrix} 1 & a_{2,2} & & a_{2,n} \\ 0 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{n-1} a_{n,n} \begin{vmatrix} 1 & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \\ 0 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

Ove si sono fatti gli opportuni scambi di righe per portare al primo posto la riga che inizia con 1 e lasciare le rimanenti nell'ordine crescente. [segue]

[continua]
Ricordando la formula per il determinante a blocchi e indicando con A_{ij} la sottomatrice di A che si ottiene cancellando la riga i e la colonna j, possiamo riassumere il calcolo precedente scrivendo:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1}.$$

[N.B. per ogni intero i, $(-1)^{i-1} = (-1)^{i+1}$.]
Possiamo generalizzare ancora un po', osservando che potremmo fare la stessa decomposizione rispetto a qualunque colonna e, scambiando le colonne in modo da portare la j-esima al primo posto e lasciare invariato l'ordine crescente delle rimanenti, aggiungeremmo solo un fattore $(-1)^{j-1}$. Abbiamo quindi dimostrato la seguente

Proposizione (Formula di Laplace)

Sia $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K)$ e indichiamo con A_{ij} la sottomatrice di A che si ottiene cancellando la riga i e la colonna j. Allora, per ogni $j = 1, \dots, n$, si ha

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

Poiché il determinante di una matrice coincide con quello della sua trasposta, esiste un analogo sviluppo di Laplace per riga per il calcolo del determinante e si può usare liberamente il calcolo per riga o per colonna a seconda della comodità di calcolo.

Esempio : Applichiamo la formula di Laplace per calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Q}).$$

Svolg.: Sviluppiamo rispetto alla terza colonna e, iterando il procedimento, si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2-3+2 = 1.$$

Si osservi che per il calcolo dei due determinanti 3×3 abbiamo usato in entrambo i casi lo sviluppo secondo la prima riga. Il lettore potrebbe verificare il risultato ottenuto usando gli altri metodi fin qui descritti per il calcolo del determinante. □

Lo sviluppo di Laplace è quindi una formula ricorsiva per il calcolo del determinante; ovvero il calcolo di un determinante $n \times n$ si riduce al calcolo di n determinanti $(n-1) \times (n-1)$, ciascuno dei quali si riduce al calcolo di determinanti di ordine inferiore, fino a concludersi.

La formula di Laplace dice che, data una matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K)$, si ha

$$\boxed{\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \qquad \text{per ogni } j = 1, \dots, n,}$$

ove A_{ij} è la sottomatrice di A che si ottiene cancellando la riga i e la colonna j.

Possiamo generalizzare ancora un po' e considerare due indici di colonna distinti $j \neq h$. Allora si ha

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ih} \det A_{ij} = 0 \qquad \text{per ogni } 1, \leq j, h \leq n, \text{ con } j \neq h.}$$

Infatti, la sommatoria qui sopra calcola il determinante di una matrice che ha due colonne uguali. Infatti la h-esima colonna di A compare sia nel suo posto naturale nelle sottomatrici A_{ij}, che al posto della j-esima colonna nella formula di Laplace. Poiché il determinante è una funzione (multilineare) alternante delle colonne della matrice, il risultato è nullo.

Definizione

Sia $A \in M_n(K)$ una matrice quadrata e sia $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ definita ponendo $b_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, ove A_{ij} è la sottomatrice di A che si ottiene cancellando la riga i e la colonna j. Si chiama *matrice dei complementi algebrici* della matrice A la matrice trasposta della matrice B, ovvero $A^c = {}^tB$.

Le osservazioni fatte nella slide precedente possono essere meglio formalizzate nella seguente

Proposizione (Laplace)

Sia $A \in M_n(K)$ una matrice quadrata e sia A^c la matrice dei complementi algebrici. Allora si ha $A^cA = AA^c = (\det A)\mathbf{1}_n$.

In particolare, dalla Proposizione precedente si ricava di nuovo il fatto che una matrice $A \in M_n(K)$ è invertibile se, e solo se, $\det A \neq 0$; inoltre l'inversa può essere determinata a partire dalla matrice dei complementi algebrici, ovvero

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^c.}$$

Esempio: Si verifichi che, se $ad-bc\neq 0$, allora $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
Sia

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q}).$$

Si calcoli la matrice A^c dei complementi algebrici e si verifichi che $AA^c = A^cA = (\det A)\mathbf{1}_3$.

Svolg.: La verifica nel caso 2×2 consiste in un calcolo diretto, lasciato al lettore. Nel caso 3×3 si ha

$$A^c = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -16 & -20 & 2 \\ -4 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

È un calcolo diretto la verifica che

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -16 & -20 & 2 \\ -4 & -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -16 & -20 & 2 \\ -4 & -5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix};$$

e dunque si ha $\det A = 6$ (e $\det A^c = 6^2$). $\square$

Minori di una matrice (rettangolare)

Abbiamo definito il determinante per le matrici quadrate e non esiste il determinante di una matrice rettangolare ($A \in M_{m\times n}(K)$ con $m \neq n$). Però una matrice rettangolare contiene svariate sottomatrici quadrate, di vari ordini e possiamo parlare del determinante di queste sottomatrici e mostrare che relazioni ci sono tra l'annullarsi di questi determinanti e il rango della matrice.

Definizione (minori)

Siano $A \in M_{m\times n}(K)$ e $1 \leq k \leq \min\{n, m\}$ un intero. Fissate due funzioni strettamente crescenti $I : \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, m\}$ e $J : \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, n\}$, si indichi con A_{IJ} la sottomatrice di ordine k di A ottenuta prendendo nel posto (r, s) l'elemento $a_{I(r),J(s)}$ di A, al variare di $1 \leq r, s \leq k$. Si chiama *minore di ordine* k, estratto dalle righe $I(1) < I(2) < \cdots < I(k)$ e dalle colonne $J(1) < J(2) < \cdots < J(k)$ il determinante della sottomatrice A_{IJ}; ovvero

$$\det A_{IJ} = \begin{vmatrix} a_{I(1),J(1)} & \cdots & a_{I(1),J(k)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{I(k),J(1)} & \cdots & a_{I(k),J(k)} \end{vmatrix}.$$

Esempio : Sia $A \in M_{4\times 6}(\mathbb{Q})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il minore di ordine 2 estratto dalle righe $2, 4$ e colonne $4, 6$ è $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$
Siano a il minore estratto dalle prime tre righe e colonne, b quello ottenuto prendendo le righe $1, 3, 4$ e le colonne $1, 3, 4$, e c quello ottenuto prendendo le righe $1, 2, 3$ e le colonne $3, 4, 5$. Ovvero

$$a = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad b = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad c = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Il minore di ordine 4 estratto dalle colonne $1, 2, 3, 5$ (e, ovviamente, da tutte le righe) è

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 13.$$

Quest'ultimo calcolo ci dice che le quattro colonne sono linearmente indipendenti in $\mathbb{Q}^4$ e quindi che la matrice A ha rango 4. Questa osservazione si può generalizzare.

Proposizione

Siano $A \in M_{m\times n}(K)$ e $1 \le k \le \min\{n, m\}$ un intero. Allora $\operatorname{rk} A \ge k$ se, e solo se, esiste almeno un minore di ordine k estratto da A che non sia nullo.

dim. Sia A_{IJ} una sottomatrice di ordine k di A con $\det A_{IJ} \neq 0$. Allora siano $w_1, \dots, w_k$ i vettori di K^m che hanno come coordinate in base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_m\}$, le colonne di posto $J(1) < J(2) < \cdots < J(k)$ di A; ovvero sia $w_h = \sum_{i=1}^m a_{i,J(h)} e_i$, per $h = 1, \dots, k$, e mostriamo che questi vettori sono linearmente indipendenti. Se non lo fossero, esisterebbe $x = {}^t(x_1, \dots, x_k) \neq {}^t(0, \dots, 0)$ in K^k tale che $x_1 w_1 + \cdots + x_k w_k = 0$, e dunque $x \in \ker A_{IJ}$ (o, meglio, x apparterrebbe al nucleo dell'endomorfismo di K^k di matrice A_{IJ} in base canonica), ma questo nucleo deve essere banale perché A_{IJ} è invertibile essendo $\det A_{IJ} \neq 0$. Dunque le colone $w_1, \dots, w_k$ sono linearmente indipendenti e $\operatorname{rk} A \ge k$.

Viceversa, sia $\operatorname{rk} A \ge k$ e siano $J(1) < J(2) < \cdots < J(k)$ gli indici di k colonne di A linearmente indipendenti e indichiamo ancora con $w_1, \dots, w_k$ i vettori di K^m che hanno queste colonne come coordinate in base canonica. Se $k = m$, la sottomatrice di ordine m di A ottenute prendendo queste colonne, ha rango massimo e quindi determinante non nullo, che dimostra la tesi. Se, invece, $k < m$, possiamo completare i vettori a una base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ di K^m aggiungendo $w_{k+1} = e_{i_1}, \dots, w_m = e_{i_{m-k}}$, opportuni vettori della base canonica (Lemma di Scambio). Allora, presa una qualsiasi forma n-lineare non nulla $0 \neq D \in \mathcal{A}^m(K^m)$, si ha $\frac{D(w_1,\dots,w_m)}{D(e_1,\dots,e_m)} \neq 0$, perché gli argomenti del numeratore sono una base di K^m. Questo determinante coincide (a meno del segno) con il minore di A estratto dalle colonne $J(1) < J(2) < \cdots < J(k)$ e dalle righe di indice diverso da $i_1, \dots, i_{m-k}$, come si può vedere, ad esempio, applicando la formula di Laplace alle ultime colonne della matrice di cambiamento di base $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{E}}(\mathrm{id})$. □

Orientamento - Volume

Definizione (Determinante del cambiamento di base)

Siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$ basi ordinate di uno stesso spazio vettoriale V e $0 \neq D \in A^n(V)$. Il *determinante del cambiamento di base* (da $\mathcal{W}$ a $\mathcal{V}$) è lo scalare non nullo

$$\det \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathrm{id}_V) = \frac{D(w_1, \dots, w_n)}{D(v_1, \dots, v_n)}.$$

D'ora in poi, supponiamo di lavorare su un campo ordinato (ad esempio $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$).

Definizione (equiorientamento)

Dato uno spazio vettoriale di dimensione finita V, due basi ordinate, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$, di V si dicono *concordi* (o *equiorientate*) se il determinante del cambiamento di base è positivo.

In questo modo si definisce una relazione di equivalenza nell'insieme delle basi ordinate che divide questo insieme in due classi di equivalenza distinte, che danno luogo ai due orientamenti dello spazio.

Proposizione

Sia K un campo ordinato e V uno spazio vettoriale di dimensione finita $n \geq 1$ su K. La relazione di equiorientamento è una relazione di equivalenza nell'insieme delle basi ordinate di V che lo divide in due classi di equivalenza distinte.

dim. La relazione è

- riflessiva, perché, per ogni base ordinata $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$, si ha $\frac{D(v_1,\dots,v_n)}{D(v_1,\dots,v_n)} = 1 > 0$;
- simmetrica, perché, date due basi ordinate $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$,

$$\frac{D(w_1, \dots, w_n)}{D(v_1, \dots, v_n)} > 0 \iff \frac{D(v_1, \dots, v_n)}{D(w_1, \dots, w_n)} > 0;$$

- transitiva, perché, date tre basi ordinate $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_n\}$, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$, con $\mathcal{U}$ concorde con $\mathcal{V}$ e $\mathcal{V}$ concorde con $\mathcal{W}$, si ha

$$\frac{D(u_1, \dots, u_n)}{D(w_1, \dots, w_n)} = \frac{D(u_1, \dots, u_n)}{D(v_1, \dots, v_n)} \frac{D(v_1, \dots, v_n)}{D(w_1, \dots, w_n)},$$

  e il prodotto di numeri positivi è positivo, per cui $\mathcal{U}$ è concorde con $\mathcal{W}$.

Dunque è una relazione di equivalenza. Fissata una base ordinata $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e presa una qualunque base ordinata, $\mathcal{W}$, se quest'ultima non è concorde con $\mathcal{V}$, allora è concorde con $\mathcal{V}' = \{ -v_1, v_2, \dots, v_n \}$. Dunque vi sono esattamente due classi di equivalenza. $\square$

Definizione

Sia K un campo ordinato. Uno spazio vettoriale V di dimensione finita $n \geq 1$ su K si dice *orientato* se si ammettono solo cambiamenti di base tra basi concordi.

Definizione

Sia K un campo ordinato. Uno spazio vettoriale V di dimensione finita $n \geq 1$ su K si dice *orientato* se si ammettono solo cambiamenti di base tra basi concordi.

Sia ora $V = \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una sua base (ordinata). Siano dati i vettori $u_1, \dots, u_n$ in $\mathbb{R}^n$. Il parallelepipedo generato dai vettori dati è l'insieme

$$PL(u_1, \dots, u_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_1 u_i \;\middle|\; x_i \in [0,1], \text{ per } i = 1, \dots, n \right\}.$$

Il volume orientato del parallelepipedo rispetto alla base $\mathcal{V}$ è il numero reale

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{V}; PL(u_1, \dots, u_n)) = \frac{D(u_1, \dots, u_n)}{D(v_1, \dots, v_n)}.$$

Il suo valore assoluto è il volume non-orientato del parallelepipedo. Se $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, la relazione tra i due valori del volume è
$\mathrm{Vol}(\mathcal{V}; PL(u_1, \dots, u_n)) = \det \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathrm{id})\mathrm{Vol}(\mathcal{W}; PL(u_1, \dots, u_n))$. In particolare, il volume non cambia di segno se le basi sono concordi.

La nozione verrà ripresa e approfondita nel suo ambito naturale, ovvero lo Spazio Euclideo. Per alcuni cenni e qualche disegnetto si vedano le slides (a parte) sul volume.

Regola di Cramer

Proposizione

Sia $Ax = b$ un sistema lineare con $A \in M_n(K)$ e $b \in K^n$. Il sistema lineare ha un'unica soluzione se, e solo se, $\det A \neq 0$ e, in tal caso, la soluzione è il vettore $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$, ove $x_j = \frac{\det B_j}{\det A}$ e B_j è la matrice che si ottiene da A sostituendo la j-esima colonna con la colonna b dei termini noti.

Regola di Cramer

Proposizione

Sia $Ax = b$ un sistema lineare con $A \in M_n(K)$ e $b \in K^n$. Il sistema lineare ha un'unica soluzione se, e solo se, $\det A \neq 0$ e, in tal caso, la soluzione è il vettore $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$, ove $x_j = \frac{\det B_j}{\det A}$ e B_j è la matrice che si ottiene da A sostituendo la j-esima colonna con la colonna b dei termini noti.

dim. Sia $\phi : K^n \to K^n$ l'endomorfismo di matrice A in base canonica e sia $w = b_1e_1 + \cdots + b_ne_n$. Le soluzioni del sistema costituiscono la controimmagine tramite ϕ del vettore w e tale insieme è costituito da un solo vettore se, e solo se, ϕ è invertibile, ovvero $\det \phi = \det A \neq 0$.

Regola di Cramer

Proposizione

Sia $Ax = b$ un sistema lineare con $A \in M_n(K)$ e $b \in K^n$. Il sistema lineare ha un'unica soluzione se, e solo se, $\det A \neq 0$ e, in tal caso, la soluzione è il vettore $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$, ove $x_j = \frac{\det B_j}{\det A}$ e B_j è la matrice che si ottiene da A sostituendo la j-esima colonna con la colonna b dei termini noti.

dim. Sia $\phi : K^n \to K^n$ l'endomorfismo di matrice A in base canonica e sia $w = b_1e_1 + \cdots + b_ne_n$. Le soluzioni del sistema costituiscono la controimmagine tramite ϕ del vettore w e tale insieme è costituito da un solo vettore se, e solo se, ϕ è invertibile, ovvero $\det \phi = \det A \neq 0$.
In tal caso sia $v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ tale che $w = \phi(v) = x_1\phi(e_1) + \cdots + x_n\phi(e_n)$. Allora, se per ogni $j = 1, \dots, n$, prendiamo i vettori $\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)$ e sostituiamo $\phi(e_j)$ con w, si ha

$$D(\phi(e_1), \dots, w, \dots, \phi(e_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i D(\phi(e_1), \dots, \phi(e_i), \dots, \phi(e_n)) = x_j D(\phi(e_1), \dots, \phi(e_n))$$

ovvero $x_j = \dfrac{D(\phi(e_1), \dots, w, \dots, \phi(e_n))}{D(\phi(e_1), \dots, \phi(e_n))} = \dfrac{\det B_j}{\det A}$. □

Quanto visto generalizza a qualsiasi dimensione finita i noti risultati sui sistemi di Cramer in due variabili.