Diagonalizzazione di un endomorfismo

maurizio candilera

October 1, 2019

Matrici simili

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su K e $\phi : V \to V$ un'applicazione lineare. Fissata una base (ordinata) $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V, sia $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$.
Vogliamo vedere sotto quali condizioni esiste una base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$ di V per cui la matrice $D = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\phi)$ sia *diagonale*, ovvero $D = (d_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ con $d_{ij} = 0$ per $i \neq j$.
Se una tale base esiste, presa la matrice di cambiamento di base $P = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathrm{id}_V)$, si ha

$$D = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\phi) = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\mathrm{id}_V)\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathrm{id}_V) = P^{-1}AP.$$

In termini di matrici, ciò corrisponde allo studio delle classi di una particolare relazione di equivalenza.

Definizione

Due matrici A e B in $M_n(K)$ si dicono *simili* se esiste una matrice invertibile $P \in \mathrm{GL}(n, K)$ tale che $B = P^{-1}AP$. In tal caso scriveremo $A \simeq B$.

La relazione di simiglianza è una relazione di equivalenza. Infatti è riflessiva perché $A = \mathbf{1}_n A \mathbf{1}_n$ e quindi $A \simeq A$; è simmetrica perché, se $A \simeq B$ ovvero $B = P^{-1}AP$, allora $A = PBP^{-1}$ e quindi $B \simeq A$; è transitiva perché, se $A \simeq B$ e $B \simeq C$ ovvero $B = P^{-1}AP$ e $C = Q^{-1}BQ$, allora $C = Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = (PQ)^{-1}APQ$, e quindi $A \simeq C$.

Ci siamo quindi posti il problema di capire se una matrice A è diagonalizzabile, ovvero sotto quali condizioni la sua classe di simiglianza contiene una matrice diagonale.

Autovalori e Autovettori

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su K e $\phi : V \to V$ un'applicazione lineare. Se $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$ di V è una base per cui la matrice $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\phi)$ è *diagonale*, allora si ha $\phi(w_i) = c_i w_i$, per opportuni scalari $c_i \in K$ e $i = 1, \dots, n$.

Definizione [Autovalori e Autovettori]

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su K e $\phi : V \to V$ un'applicazione lineare. Diremo che uno scalare c è un'*autovalore* per ϕ se esiste un vettore $v \neq 0$, tale che $\phi(v) = cv$. In tal caso v si dice un *autovettore* relativo all'autovalore c.

La condizione $v \neq 0$ è necessaria perché la definizione abbia senso; infatti, $\phi(0) = 0 = c0$ per ogni scalare c.

Osservazione

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su K e $\phi : V \to V$ un'applicazione lineare. Per ogni scalare c l'insieme $W_c = \{\, v \in V \mid \phi(v) = cv \,\}$ è un sottospazio vettoriale di V.

dim. Infatti, $0 \in W_c$ e, se $v, v' \in W_c$ e $a, a' \in K$, allora $\phi(av + a'v') = a\phi(v) + a'\phi(v') = c(av + a'v')$, e quindi W_c è chiuso per combinazioni lineari ed è perciò un sottospazio vettoriale. □

Si osservi che $W_c = \ker(\phi - c\,\mathrm{id}_V)$ e che c è un autovalore se, e solo se, $\dim W_c \geq 1$. In tal caso $W_c = \ker(\phi - c\,\mathrm{id}_V)$ è l'*autospazio* relativo all'autovalore c.

Abbiamo già osservato che c è un autovalore se, e solo se, $\dim\ker(\phi - c\,\mathrm{id}_V) \geq 1$ e un endomorfismo ha un nucleo non banale se, e solo se, il suo determinante è nullo, ovvero c è un autovalore se, e solo se, $\det(\phi - c\,\mathrm{id}_V) = 0$.

Definizione [Polinomio caratteristico]

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su K e $\phi : V \to V$ un'applicazione lineare. Fissata una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V, sia $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$. Si chiama *polinomio caratteristico* di ϕ il polinomio monico $p_\phi(X) = \det(X\mathbf{1}_n - A) \in K[X]$.

Ricordando che il determinante di una matrice $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ è uguale a $\sum_{\sigma\in\Sigma_n} (\operatorname{sgn}\sigma) b_{\sigma(1)1} \cdots b_{\sigma(n)n}$; possiamo applicare questa formula a qualsiasi matrice (anche ad elementi in un anello, qual è $K[X]$) e il polinomio caratteristico è uguale a $\det(X\mathbf{1}_n - A) = X^n - (\operatorname{tr} A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A$.

Osservazione

Siano $A, B \in M_n(K)$. Se $A \simeq B$, allora $\det(X\mathbf{1}_n - A) = \det(X\mathbf{1}_n - B)$.

dim. Se $A \simeq B$ esiste una matrice invertibile $P \in \mathrm{GL}(n, K)$, tale che $B = P^{-1}AP$ e la matrice scalare $X\mathbf{1}_n$ commuta con ogni altra matrice, per cui $X\mathbf{1}_n = P^{-1}(X\mathbf{1}_n)P$. Allora si ha

$$\det(X\mathbf{1}_n - B) = \det(P^{-1}(X\mathbf{1}_n)P - P^{-1}AP) = \det\left(P^{-1}(X\mathbf{1}_n - A)P\right) = \det(X\mathbf{1}_n - A);$$

ove l'ultima uguaglianza è conseguenza del Teorema di Binet. □

Esempio : Si consideri l'applicazione lineare $\phi : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ di matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$ in base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$.

(a) Si determinino autovalori e autospazi per A.

(b) Si dica se A è diagonalizzabile e, in caso affermativo, si determinino una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $D = P^{-1}AP$.

Svolg.: (*a*) Gli autovalori sono tutti e soli gli zeri del polinomio caratteristico, ovvero del polinomio

$$p_\phi(X) = \begin{vmatrix} X-5 & -8 \\ 2 & X+5 \end{vmatrix} = X^2 - 9 = (X-3)(X+3).$$

Gli autospazi sono soluzioni dei due sistemi lineari omogenei di matrice rispettivamente $A - 3\mathbf{1}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$ e $A + 3\mathbf{1}_2 = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$; dunque

$$\ker(\phi - 3\mathrm{id}) = \langle 4e_1 - e_2 \rangle \quad \text{e} \quad \ker(\phi + 3\mathrm{id}) = \langle e_1 - e_2 \rangle .$$

(*b*) I due generatori degli autospazi sono linearmente indipendenti, per cui esiste una base $\mathcal{W} = \{w_1, w_2\}$ di $\mathbb{Q}^2$ fatta di autovettori per ϕ e, precisamente, $w_1 = 4e_1 - e_2$ e $w_2 = e_1 - e_2$. In tal caso, possiamo prendere $D = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ e $P = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ per concludere. □

Esempio : Si consideri l'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ di matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ in base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$.

(a) Si determinino autovalori e autospazi per A.

(b) Si dica se A è diagonalizzabile e, in caso affermativo, si determinino una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $D = P^{-1}AP$.

Svolg.: (*a*) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = \begin{vmatrix} X-2 & -5 \\ 1 & X+2 \end{vmatrix} = X^2 + 1$.
Il sistema non ha soluzioni reali, quindi A non è diagonalizzabile sul campo reale.
Possiamo considerare la stessa matrice A come matrice di un endomorfismo di $\mathbb{C}^2$. Il polinomio caratteristico è lo stesso e gli autovalori sono i e $-i$. Gli autospazi sono soluzioni dei due sistemi lineari omogenei di matrice $A - i\mathbf{1}_2 = \begin{pmatrix} 2-i & 5 \\ -1 & -2-i \end{pmatrix}$ e $A + i\mathbf{1}_2 = \begin{pmatrix} 2+i & 5 \\ -1 & -2+i \end{pmatrix}$; dunque

$$\ker(\phi - i\mathrm{id}) = \langle (2+i)e_1 - e_2 \rangle \quad \text{e} \quad \ker(\phi + i\mathrm{id}) = \langle (2-i)e_1 - e_2 \rangle$$

[i due autovalori sono numeri complessi coniugati e tali sono anche le coordinate degli autovettori corrispondenti].

(*b*) Anche in questo caso possiamo avere solo matrici a entrate complesse e possiamo prendere $D = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ e $P = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 2+i & 2-i \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ per concludere. $\square$

Esempio: Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ di matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ in base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

(a) Si determinino autovalori e autospazi per A.

(b) Si dica se A è diagonalizzabile e, in caso affermativo, si determinino una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $D = P^{-1}AP$.

Svolg.: (*a*) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = \begin{vmatrix} X+1 & -6 & -3 \\ -1 & X & 1 \\ 1 & -2 & X-3 \end{vmatrix} = (X-2)^2(X+2)$.
Gli autovalori sono quindi 2 e -2, il primo con molteplicità (algebrica) 2.
Gli autospazi sono soluzioni dei due sistemi lineari omogenei di matrice rispettivamente $A - 2\mathbf{1}_3 = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $A + 2\mathbf{1}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; dunque

$$\ker(\phi - 2\mathrm{id}) = \langle e_1 + e_3, e_2 - 2e_3 \rangle \quad \text{e} \quad \ker(\phi + 2\mathrm{id}) = \langle 3e_1 - e_2 + e_3 \rangle .$$

(*b*) L'endomorfismo è diagonalizzabile su $\mathbb{Q}$ e possiamo prendere
$D = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ e $P = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ per concludere. $\square$

Esempio : Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ di matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ in base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

(a) Si determinino autovalori e autospazi per A.

(b) Si dica se A è diagonalizzabile e, in caso affermativo, si determinino una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $D = P^{-1}AP$.

Svolg.: (*a*) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 1 \\ -1 & X-2 & 0 \\ -1 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = X(X-2)^2$.
Gli autovalori sono quindi 0 e 2, il secondo con molteplicità (algebrica) 2.
Gli autospazi sono soluzioni dei due sistemi lineari omogenei di matrice rispettivamente $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $A - 2\mathbf{1}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; dunque

$$\ker\phi = \langle 2e_1 - e_2 - e_3 \rangle \quad \text{e} \quad \ker(\phi - 2\mathrm{id}) = \langle e_2 + e_3 \rangle .$$

(*b*) L'endomorfismo non è diagonalizzabile; né su $\mathbb{Q}$, né su estensioni di $\mathbb{Q}$. Tutti gli autovalori sono numeri razionali, ma vi sono al massimo due autovettori linearmente indipendenti (il sottospazio di $\mathbb{Q}^3$ generato dagli autovettori ha dimensione 2) e quindi non esiste una base di $\mathbb{Q}^3$ fatta di autovettori per ϕ. □

Un criterio di diagonalizzabilità

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su K e $\phi : V \to V$ un'applicazione lineare. Abbiamo visto che esiste una base di autovettori per ϕ (ovvero ϕ è diagonalizzabile) se tutti gli autovalori di ϕ (ovvero le radici del polinomio caratteristico) sono nel campo K e inoltre vi sono abbastanza autovettori linearmente indipendenti per generare V. Abbiamo visto negli esempi che ciò non sempre accade.

Definizione [molteplicità algebrica]

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su K e $\phi : V \to V$ un'applicazione lineare. Dato un autovalore c, si chiama *molteplicità algebrica* di c il massimo esponente intero m tale che $(X - c)^m$ divide il polinomio caratteristico $p_\phi(X)$ e si scrive $m_a(c) = m$.

Definiamo ora un altro intero associato ad un autovalore.

Definizione [molteplicità geometrica]

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su K e $\phi : V \to V$ un'applicazione lineare. Dato un autovalore c, si chiama *molteplicità geometrica* di c la dimensione dell'autospazio relativo a c e si scrive $m_g(c) = \dim \ker (\phi - c\mathrm{id}_V)$.

Una disuguaglianza fondamentale lega le due grandezze definite sopra.

Lemma 1

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su K e $\phi : V \to V$ un'applicazione lineare. Per ogni autovalore c di ϕ, si ha $m_g(c) \leq m_a(c)$.

dim. Fissiamo l'autovalore c e sia $v_1, \dots, v_k$ una base dell'autospazio $\ker(\phi - c\,\mathrm{id}_V)$, per cui $m_g(c) = k$. Completiamo questi vettori (linearmente indipendenti) a una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V e possiamo scrivere la matrice di ϕ a blocchi, ovvero $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} \mathbf{c}\mathbb{1}_k & B \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico $p_\phi(X) = \det(X\mathbf{1}_n - A) = (X - c)^k g(X)$, come si può vedere, ad esempio, utilizzando iterativamente lo sviluppo di Laplace del determinante rispetto alle prime k colonne. Si ha così che $(X - c)^k$ divide il polinomio caratteristico $p_\phi(X)$ e quindi $m_a(c) \geq k = m_g(c)$. □

Lemma 2

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su K e $\phi : V \to V$ un'applicazione lineare. Autovettori di ϕ relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.

dim. Siano $c_1, \dots, c_r$ autovalori per ϕ, a due a due distinti; e siano $v_1, \dots, v_r$ autovettori ad essi corrispondenti. Supponiamo che vi sia una relazione lineare, $a_1 v_1 + \cdots + a_r v_r = 0$, soddisfatta da questi vettori e supponiamo sia di lunghezza minima (ovvero con il numero minimo di coefficenti diversi da 0). Se i coefficenti non sono tutti nulli, possiamo supporre senza perdere di generalità che sia a_1 il primo coefficiente non nullo. Applicando l'endomorfismo $\phi - c_1\mathrm{id}_V$ ai due membri dell'identità si ha la relazione $a_2(c_2 - c_1)v_2 + \cdots + a_r(c_r - c_1)v_r = 0$ che ha un addendo non nullo in meno della precedente, e ciò è assurdo, perché la relazione aveva lunghezza minima. □

Sia quindi V un K-spazio vettoriale di dimensione finita e $\phi : V \to V$ un endomorfismo con polinomio caratteristico $p_\phi(X) = (X - c_1)^{m_1} \cdots (X - c_r)^{m_r}$, con gli autovalori $c_1, \dots, c_r$ in K, a due a due distinti. Allora gli autospazi $W_{c_i} = \ker(\phi - c_i \mathrm{id}_V)$, per $i = 1, \dots, r$, sono in somma diretta (ogni addendo ha intersezione banale con la somma dei rimanenti, per il lemma 2). Per cui, il sottospazio di V generato dagli autovettori di ϕ è $W = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(\phi - c_i \mathrm{id}_V)$ che ha dimensione $m_g(c_1) + \cdots + m_g(c_r)$. Poiché, gli addendi sono interi positivi e per ogni addendo si ha $m_g(c_i) \leq m_a(c_i) = m_i$ (per il lemma 1), ne consegue che

$$m_g(c_1) + \cdots + m_g(c_r) \leq m_a(c_1) + \cdots + m_a(c_r) = \deg p_\phi(X) = \dim V,$$

e vale l'uguaglianza se, e solo se, $m_g(c_i) = m_a(c_i)$ per ogni $i = 1, \dots, r$.
Abbiamo quindi dimostrato il seguente

Teorema di Frobenius (Primo criterio di diagonalizzazione)

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su K e $\phi : V \to V$ un'applicazione lineare. Allora ϕ è diagonalizzabile su K se, e solo se, tutte le radici del polinomio caratteristico di ϕ appartengono a K e per ogni autovalore la molteplicità algebrica coincide con quella geometrica.

Esempio : Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una sua base e si consideri l'endomorfismo $\phi : V \to V$ di matrice

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -3 & -12 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 11 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino polinomio caratteristico, autovalori e autospazi di ϕ. Si dica se ϕ è diagonalizzabile e si determinino una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $D = P^{-1}AP$.

(b) Si dica se esiste una base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_5\}$ di V e degli scalari $c_1, \dots, c_5$, tali che $\phi = \sum_{j=1}^{5} c_j w_j \otimes w_j^*$, ove $\mathcal{W}^* = \{w_1^*, \dots, w_5^*\}$ è la base duale di V^*. In tal caso si scrivano le matrici $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathrm{id})$ e $\alpha_{\mathcal{W}^*,\mathcal{V}^*}(\mathrm{id})$.

Svolg.: (*a*) Il polinomio caratteristico è $\det(A - X\mathbf{1}_5) = (X+1)^2(X-2)^2(X-3)$. Tre autovalori distinti, di cui due con molteplicità algebrica 2. Per determinare le molteplicità geometriche e gli autospazi dobbiamo considerare sistemi lineari omogenei di matrice

$$A+\mathbf{1}_5 = \begin{pmatrix} -6 & 0 & -3 & -12 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & 1 & -8 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 12 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad A-2\mathbf{1}_5 = \begin{pmatrix} -9 & 0 & -3 & -12 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & -2 & -8 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad A-3\mathbf{1}_5 = \begin{pmatrix} -10 & 0 & -3 & -12 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & -3 & -8 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

I primi due han rango 3 ($m_g(-1) = m_g(2) = 2$) e l'ultima, rango 4 ($m_g(3) = 1$) e ϕ è diagonalizzabile.
[segue]

[continua]
Gli autospazi sono $\ker(\phi + \mathrm{id}_V) = \langle 2v_2 - 5v_5, 3v_1 + 2v_3 - 2v_4 \rangle$,
$\ker(\phi - 2\mathrm{id}_V) = \langle v_2 - v_5, v_1 + v_3 - v_4 \rangle$, e $\ker(\phi - 3\mathrm{id}_V) = \langle 12v_1 + 2v_2 + 8v_3 - 12v_4 - 3v_5 \rangle$.
Si ha quindi $D = P^{-1}AP$ ove

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 & 12 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -12 \\ -5 & 0 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

(*b*) Nelle ipotesi date, se $\phi = \sum_{j=1}^{5} c_j w_j \otimes w_j^*$, allora, per $i = 1, \dots, 5$, si ha

$$\phi(w_i) = \sum_{j=1}^{5} c_j w_j (w_j^* \circ w_i) = c_i w_i;$$

ovvero il vettore w_i è un autovettore per ϕ, relativo all'autovalore c_i. Poiché ϕ è diagonalizzabile, possiamo scegliere una base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_5\}$ di autovettori per ϕ; ad esempio i generatori degli autospazi indicati nel punto precedente e come scalari c_i i relativi autovalori. Dunque $P = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathrm{id}_V)$ e
${}^tP^{-1} = \alpha_{\mathcal{W}^*,\mathcal{V}^*}(\mathrm{id}_{V^*})$, per le note relazioni tra il cambiamento di base in V e il cambiamento di base tra le rispettive basi duali di V^*. A titolo di cronaca,

$$\alpha_{\mathcal{W}^*,\mathcal{V}^*}(\mathrm{id}_{V^*}) = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 & -24 & 0 \\ -4 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 36 & -3 \\ 1 & 12 & 4 & 0 & -3 \\ -4 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e ciò conclude la discussione. $\square$

Esempio : Si consideri la successione di numeri reali $(x_n)_{n\geq 0}$ definita dalle condizioni

$$x_0 = -4,\ x_1 = 1,\ x_2 = -1 \qquad \text{e} \qquad x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2}, \quad \text{per } n \geq 2.$$

(a) Si determini un'espressione esplicita per il termine generale della successione, x_n, in funzione dell'intero n. Cosa si può dire del $\lim_{n\to\infty} x_n$ e del $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$?

(b) Cosa si può dire della successione $(y_n)_{n\geq 0}$ soddisfacente alla stessa relazione ricorsiva ($y_{n+1} = 2y_n + y_{n-1} - 2y_{n-2}$, per $n \geq 2$), ma con valori iniziali $y_0 = 1$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$?

(c) Cosa si può dire del comportamento della successione $(z_n)_{n\geq 0}$, soddisfacente alla relazione ricorsiva data ($z_{n+1} = 2z_n + z_{n-1} - 2z_{n-2}$, per $n \geq 2$), al variare dei valori iniziali $z_0 = a$, $z_1 = b$, $z_2 = c$?

Svolg.: (*a*) Sia $v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $v_n = \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$, per $n \geq 2$. Si ha: $v_{n+1} = Av_n$, ove $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, e quindi $v_n = A^{n-2}v_2$. Le potenze si calcolano più facilmente se una matrice è diagonalizzabile, infatti se $A = PDP^{-1}$, per ogni esponente intero k, si ha $A^k = PD^kP^{-1}$ e le potenze di una matrice diagonale sono ancora matrici diagonali.
Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 2 & -1 & X-2 \end{vmatrix} = (X+1)(X-1)(X-2); \quad \text{quindi } A \text{ è diagonalizzabile.}$$

[segue]

[continua]

Gli autospazi sono $\ker(A - \mathbf{1}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\ker(A + \mathbf{1}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\ker(A - 2\mathbf{1}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$. Si ha quindi $A = PDP^{-1}$ ove

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{e inoltre} \quad P^{-1}v_2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

per cui $v_n = PD^{n-2}P^{-1}v_2$ e quindi, prendendo la terza coordinata di questo vettore, si ha $x_n = -3 - 2(-1)^n + 2^n$, per ogni $n \geq 2$ che fornisce l'espressione richiesta. In particolare, la successione diverge, ovvero $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\left(1+(-1/2)^n - 3/2^{n+1}\right)}{2^n\left(1+(-1/2)^{n-1} - 3/2^n\right)} = 2.$

(*b*) Siano ora $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_n = \begin{pmatrix} y_{n-2} \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$, per $n \geq 2$. Fissato n, dobbiamo calcolare $v_n = PD^{n-2}P^{-1}v_2$ con il nuovo vettore v_2. La terza coordinata è $y_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$, per cui la successione non ammette limite assumendo il valore 0 per n dispari e il valore 1 per n pari.

(*c*) Se il vettore $v_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ non appartiene al sottospazio $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, di equazione $a - c = 0$, allora ha una componente parallela all'autovettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ e perciò la successione diverge, come nel caso (a).

Se invece $c = a \neq b$, allora $z_n = \frac{a+b}{2} + (-1)^n \frac{a-b}{2}$, e la successione oscilla tra due valori, come nel caso (b). Infine, se $a = b = c$ siamo nell'autospazio relativo all'autovalore 1 per cui la successione è costante, con $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{z_{n+1}}{z_n} = 1$. □

Esempio : Sia K un campo di caratteristica diversa da 2 e sia $\tau : M_n(K) \to M_n(K)$ l'applicazione che manda ogni matrice A nella sua trasposta ${}^tA$.

(a) Si calcolino il determinante, il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autospazi di τ e si dica se è diagonalizzabile.

(b) Si risponda alle stesse domande quando K è un campo di caratteristica 2.

Svolg.: (*a*) In questo caso, sono evidenti gli autospazi

$$\ker(\tau - \mathrm{id}) = \left\{ A \in M_n(C) \mid {}^tA = A \right\} = \langle \varepsilon(i,j) + \varepsilon(j,i) \mid 1 \le i \le j \le n \rangle \quad \dim\ker(\tau - \mathrm{id}) = \binom{n+1}{2}$$

$$\ker(\tau + \mathrm{id}) = \left\{ A \in M_n(C) \mid {}^tA = -A \right\} = \langle \varepsilon(i,j) - \varepsilon(j,i) \mid 1 \le i < j \le n \rangle \quad \dim\ker(\tau + \mathrm{id}) = \binom{n}{2}.$$

Quindi τ è diagonalizzabile, il polinomio caratteristico è $p_\tau(X) = (X-1)^{\binom{n+1}{2}}(X+1)^{\binom{n}{2}}$ e $\det\tau = (-1)^{\binom{n}{2}}$.

(*b*) Se il campo ha caratteristica 2 (e quindi $1 = -1$), allora $\det\tau = 1$, $p_\tau(X) = (X-1)^{n^2}$, l'unico autospazio è

$$\ker(\tau - \mathrm{id}) = \left\{ A \in M_n(C) \mid {}^tA = A \right\} = \langle \varepsilon(i,i) \mid 1 \le i \le n \rangle \oplus \langle \varepsilon(i,j) + \varepsilon(j,i) \mid 1 \le i < j \le n \rangle,$$

di dimensione $\binom{n+1}{2}$, e quindi τ non è diagonalizzabile.

Per completezza, osserviamo che la forma di Jordan di τ ha n blocchi di ordine 1 corrispondenti agli autovettori $\varepsilon(i,i)$ con $i = 1\dots, n$; e $\binom{n}{2}$ blocchi di ordine 2, ciascuno in corrispondenza con l'autovettore generalizzato $\varepsilon(i,j)$, per $1 \le i < j \le n$, e con la sua immagine tramite $\tau - \mathrm{id}$, l'autovettore $\varepsilon(i,j) + \varepsilon(j,i)$.

Endomorfismi simultaneamente diagonalizzabili

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su K e siano $\phi, \psi \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$. Diremo che i due endomorfismi sono simultaneamente diagonalizzabili se esiste una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di autovettori per entrambi gli omomorfismi.
Analogamente, diremo che due matrici $A, B \in M_n(K)$ sono simultaneamente diagonalizzabili se esiste una matrice invertibile $P \in \mathrm{GL}(n, K)$ tale che $P^{-1}AP$ e $P^{-1}BP$ siano entrambe matrici diagonali.

Proposizione

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su K e siano $\phi, \psi \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$, diagonalizzabili su K. I due endomorfismi sono simultaneamente diagonalizzabili se, e solo se, $\psi \circ \phi = \phi \circ \psi$.

dim. Se esiste una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V tale che $\phi(v_i) = a_i v_i$ e $\psi(v_i) = b_i v_i$, per $i = 1, \dots, n$, allora

$$\phi(\psi(v_i)) = b_i a_i v_i = \psi(\phi(v_i)), \text{ per } i = 1, \dots, n,$$

e quindi $\psi \circ \phi = \phi \circ \psi$ perché i due omomorfismi coincidono su una base di V.
Siano $a_1, \dots, a_r$ gli autovalori di ϕ, a due a due distinti e siano $W_1, \dots, W_r$ gli autospazi corrispondenti, cosicché $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$. Poiché ϕ e ψ commutano, preso comunque $i = 1, \dots, r$, se $w \in W_i$, allora

$$\phi(\psi(w)) = \psi(\phi(w)) = \psi(a_i w) = a_i \psi(w); \qquad \text{e quindi } \psi(w) \in W_i.$$

Dunque ψ induce un endomorfismo in ciascuno degli autospazi W_i e per ciascun autovalore di ψ le molteplicità algebrica e geometrica sono la somma delle rispettive molteplicità dell'endomorfismo indotto su W_i. Dunque in ciascuno degli autospazi c'è una base di autovettori comuni ad entrambi gli endomorfismi. □