Forma canonica di Jordan

maurizio candilera

October 1, 2019

Triangolarizzazione

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su K e $\phi : V \to V$ un'applicazione lineare. Abbiamo visto che, sotto opportune ipotesi, l'endomorfismo ϕ è diagonalizzabile, e che ciò dipende essenzialmente da due condizioni:

- l'esistenza degli autovalori nel campo K;
- l'esistenza di autospazi di dimensione adeguata.

A meno di estendere il campo K (aggiungendo eventualmente le radici del polinomio caratteristico ivi mancanti), possiamo supporre che la prima condizione sia soddisfatta, ed è quanto faremo nel seguito. Ciononostante, abbiamo visto che la seconda condizione è una caratteristica intrinseca dell'endomorfismo, che non si modifica cambiando il campo di base. Nel seguito ci occuperemo di determinare forme canoniche per le matrici di endomorfismi che abbiano tutti gli autovalori nel campo, ma non siano necessariamente diagonalizzabili.

Definizione [endomorfismo triangolarizzabile]

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su K. Un endomorfismo $\phi : V \to V$ si dice *triangolarizzabile* se esiste una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V per cui la matrice $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ sia triangolare superiore, ovvero si abbia $a_{ij} = 0$ ogniqualvolta $i > j$.

La condizione che $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ sia triangolare superiore è equivalente a chiedere che

$$\phi(v_i) \in \langle v_1, \dots, v_i \rangle, \quad \text{per } i = 1, \dots, n.$$

Naturalmente, se la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ è triangolare superiore, indicata con $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$, la base costituita dagli stessi vettori, presi nell'ordine inverso ($w_j = v_{n-j+1}$ per $j = 1, \dots, n$), allora la matrice $B = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\phi)$ è triangolare inferiore, ovvero $b_{ij} = 0$ ogniqualvolta $i < j$.

Ricordiamo infine che una matrice A si dice *strettamente triangolare* superiore se si ha $a_{ij} = 0$ ogniqualvolta $i \geq j$ (cioè è triangolare e con la diagonale nulla). Un endomorfismo $\phi : V \to V$ è *strettamente triangolarizzabile* se esiste una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V per cui $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ sia strettamente triangolare superiore; ovvero

$$\phi(v_1) = 0 \quad \text{e} \quad \phi(v_i) \in \langle v_1, \dots, v_{i-1} \rangle, \ \text{per } i = 2, \dots, n;$$

In particolare ciò implica che $\phi^n(v_j) = 0$ per ogni vettore della base; cioè che ϕ sia un *endomorfismo nilpotente* (una potenza è l'endomorfismo nullo).

Proposizione

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su K. Un endomorfismo $\phi : V \to V$ è triangolarizzabile se, e solo se, tutti gli autovalori di ϕ appartengono al campo K.

dim. Se ϕ è triangolarizzabile e $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) \in M_n(K)$ è una matrice triangolare superiore, allora anche $X\mathbf{1}_n - A$ è triangolare superiore, e il suo determinante è $\prod_{i=1}^{n}(X - a_{ii})$; quindi le radici del polinomio caratteristico sono tutte nel campo K.
Viceversa, supponiamo che tutti gli autovalori di ϕ siano nel campo K e dimostriamo che ϕ è triangolarizzabile, facendo induzione sulla dimensione n di V. Infatti, se $n = 1$ la tesi è banalmente vera. Se $n > 1$ e la tesi è vera per endomorfismi di spazi di dimensione minore di n, prendiamo un autovalore a_1 di ϕ ed un autovettore $v_1 \neq 0$ ad esso relativo. Allora, ϕ induce un endomorfismo $\overline{\phi}\colon V/\langle v_1\rangle \to V/\langle v_1\rangle$, ponendo $\overline{\phi}(v + \langle v_1\rangle) = \phi(v) + \langle v_1\rangle$ e il polinomio caratteristico di $\overline{\phi}$ è uguale $p_\phi(X)/(X - a_1)$.
Infatti, sia $v_2 + \langle v_1\rangle, \dots, v_n + \langle v_1\rangle$ una base di $V/\langle v_1\rangle$ e sia B la matrice di $\overline{\phi}$ rispetto a tale base. Allora i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono una base di V e la matrice di ϕ in tale base è della forma $A = \left(\begin{array}{c|c} a_1 & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$, da cui si deduce la relazione tra i polinomi caratteristici (si ricordi quanto osservato sui determinanti di matrici a blocchi).
Dunque, anche $\overline{\phi}$ ha tutti gli autovalori in K e $\dim(V/\langle v_1\rangle) = n - 1$, per cui, per l'ipotesi induttiva, possiamo supporre di aver scelto la base $v_2 + \langle v_1\rangle, \dots, v_n + \langle v_1\rangle$ di modo che la matrice B sia triangolare superiore e perciò anche A lo è. $\square$

Esempio: Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, di matrice

$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ in base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$.

(a) Si determinino autovalori e autospazi per ϕ.

(b) Si determini una base rispetto a cui la matrice di ϕ sia triangolare superiore (somma di una matrice diagonale con una nilpotente).

Svolg.: (*a*) Il polinomio caratteristico di ϕ è $p_\phi(X) = \det(X\mathbf{1}_4 - A) = (X-3)^2(X+1)^2$. Gli autospazi sono le soluzioni dei sistemi lineari omogenei di matrici $A - 3\mathbf{1}_4 = \begin{pmatrix} -8 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ e

$A + \mathbf{1}_4 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$; ovvero i sottospazi $\ker(\phi - 3\mathrm{id}) = \langle e_2 + e_4 \rangle$ e $\ker(\phi + \mathrm{id}) = \langle e_1 - e_3 \rangle$.

(*b*) Posto $v_1 = e_2 + e_4$, $v_2 = e_4$, $v_3 = e_1 - e_3$, $v_4 = e_1$ (come son stati trovati?); i quattro vettori formano una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ di $\mathbb{Q}^4$ e, con calcoli diretti, si verifica che,

$$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = D + N, \quad \text{ove} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice D è diagonale e ha sulla diagonale principale gli autovalori con le rispettive molteplicità algebriche. La matrice N è nilpotente e si ha $N^3 = 0$. □

Si noti che anche il prodotto di matrici $B = (A - 3\mathbf{1}_4)(A + \mathbf{1}_4) = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 16 & 0 \\ 12 & -12 & 12 & 12 \\ -16 & 0 & -16 & 0 \end{pmatrix}$ è nilpotente e

Esempio : Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su K. Si mostri che un endomorfismo $\phi : V \to V$ è nilpotente se, e solo se, 0 è il suo unico autovalore.

Svolg.: Supponiamo di aver esteso il campo K in modo che contenga tutti gli autovalori di ϕ. Sia ϕ nilpotente, con $\phi^k = 0$, e sia c un suo autovalore con autovettore v, allora $0 = \phi^k(v) = c^k v$. Poiché $v \neq 0$, deve essere $c^k = 0$ e quindi $c = 0$ perché non vi sono elementi nilpotenti in un campo. Dunque l'unico autovalore possibile per ϕ è lo zero (e non era quindi necessario ampliare il campo K.

Viceversa, sia zero l'unico autovalore di ϕ, ovvero $p_\phi(X) = X^n$ $(n = \dim_K V)$. Per la Proposizione precedente, esiste una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V per cui la matrice di ϕ sia triangolare, con gli autovalori sulla diagonale, ovvero ϕ è strettamente triangolarizzabile; cioè $\phi(v_1) = 0$ e $\phi(v_i) \in \langle v_1, \dots, v_{i-1} \rangle$ per $i = 2, \dots, n$. Dunque, per ogni vettore v_i della base si ha $\phi^n(v_i) = 0$, cioè $\phi^n = 0$ (perché coincide con l'endomorfismo nullo su una base) e ϕ è perciò nilpotente. □

Polinomio minimo

Approfondiamo lo studio degli endomorfismi di spazi vettoriali di dimensione finita, associando ad ogni endomorfismo un ulteriore polinomio. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su K e sia $\phi : V \to V$ un'applicazione lineare. Preso comunque un polinomio $F(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_kX^k$ in $K[X]$, possiamo considerare il morfismo $F(\phi) : V \to V$, che manda ogni vettore $v \in V$ in $a_0v + a_1\phi(v) + \cdots + a_k\phi^k(v)$. Si osservi che, se $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di V e $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$, allora la matrice di $F(\phi)$ si ottiene calcolando il polinomio $F(X)$ in A nell'anello delle matrici $M_n(K)$, ovvero $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(F(\phi)) = F(A) = a_0\mathbf{1} + a_1A + \cdots + a_kA^k$.
In questo modo si definisce un omomorfismo di anelli $ev_\phi : K[X] \to \mathrm{End}_K V$, dato da $ev_\phi(F(X)) = F(\phi)$ (*morfismo di valutazione*). In particolare, ev_ϕ è un omomorfismo di K-spazi vettoriali tra lo spazio di dimensione infinita $K[X]$ e lo spazio $\mathrm{End}_K V$ di dimensione n^2. Dunque, per ogni $\phi \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$, il nucleo di ev_ϕ è un ideale di $K[X]$, generato da un polinomio non nullo.

Definizione [polinomio minimo]

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su K e $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Il *polinomio minimo* di ϕ, $\lambda_\phi(X)$, è il generatore monico del nucleo del morfismo di valutazione $ev_\phi : K[X] \to \mathrm{End}_K V$. Ovvero, $\lambda_\phi(X)$ è il polinomio monico di grado minimo tale che $\lambda_\phi(\phi) = 0$.

Teorema di Hamilton-Cayley

Introducendo la forma canonica triangolare di un endomorfismo, $\phi : V \to V$, con autovalori $a_1, \dots, a_r$, a due a due distinti e tutti nel campo K, abbiamo osservato che l'endomorfismo $(\phi - a_1 \mathrm{id}_V) \cdots (\phi - a_r \mathrm{id}_V)$ è strettamente triangolarizzabile e quindi è nilpotente, per cui, se $n = \dim_K V$, si ha $ev_\phi\big((X - a_1)^n \cdots (X - a_r)^n\big) = 0$. Più precisamente, le relazioni tra polinomio minimo e polinomio caratteristico sono descritte nel seguente

Teorema (Hamilton-Cayley)

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su K e $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Il polinomio minimo di ϕ, $\lambda_\phi(X)$, divide il polinomio caratteristico $p_\phi(X)$ e i due polinomi hanno le stesse radici (eventualmente con molteplicità diverse).

Teorema di Hamilton-Cayley

Introducendo la forma canonica triangolare di un endomorfismo, $\phi : V \to V$, con autovalori $a_1, \dots, a_r$, a due a due distinti e tutti nel campo K, abbiamo osservato che l'endomorfismo $(\phi - a_1 \mathrm{id}_V) \cdots (\phi - a_r \mathrm{id}_V)$ è strettamente triangolarizzabile e quindi è nilpotente, per cui, se $n = \dim_K V$, si ha $ev_\phi\big((X-a_1)^n \cdots (X-a_r)^n\big) = 0$. Più precisamente, le relazioni tra polinomio minimo e polinomio caratteristico sono descritte nel seguente

Teorema (Hamilton-Cayley)

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su K e $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Il polinomio minimo di ϕ, $\lambda_\phi(X)$, divide il polinomio caratteristico $p_\phi(X)$ e i due polinomi hanno le stesse radici (eventualmente con molteplicità diverse).

dim. Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V e sia $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$. Per verificare che $\lambda_\phi(X)$ divide $p_\phi(X)$, è sufficiente dimostrare che $p_\phi(A) = 0$ in $M_n(K)$. Sia quindi $p_\phi(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + X^n$ e consideriamo le matrici

$$p_\phi(X)\mathbf{1}_n = a_0\mathbf{1}_n + a_1 X\mathbf{1}_n + \cdots + X^n\mathbf{1}_n \qquad \text{e} \qquad p_\phi(A) = a_0\mathbf{1}_n + a_1 A + \cdots + A^n.$$

Per ogni intero $k \geq 1$, si ha $X^k\mathbf{1}_n - A^k = (X\mathbf{1}_n - A)(X^{k-1}\mathbf{1}_n + X^{k-2}A + \cdots + A^{k-1})$ e $B_k(X) = X^{k-1}\mathbf{1}_n + X^{k-2}A + \cdots + A^{k-1}$ è una matrice a elementi in $K[X]$. Quindi, possiamo scrivere,

$$p_\phi(X)\mathbf{1}_n - p_\phi(A) = (X\mathbf{1}_n - A)B(X),$$

ove $B(X) = \sum^n \; B_k(X)$ è una matrice a elementi in $K[X]$. [segue]

[continua]
Ricordando la matrice dei complementi algebrici $M(X)$ e la regola di Laplace, si ha

$$p_\phi(X)\mathbf{1}_n = \begin{pmatrix} \det(X\mathbf{1}_n - A) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \det(X\mathbf{1}_n - A) \end{pmatrix} = (X\mathbf{1}_n - A)M(X)$$

e anche la matrice dei complementi algebrici è una matrice a elementi in $K[X]$.

[continua]
Ricordando la matrice dei complementi algebrici $M(X)$ e la regola di Laplace, si ha

$$p_\phi(X)\mathbf{1}_n = \begin{pmatrix} \det(X\mathbf{1}_n - A) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \det(X\mathbf{1}_n - A) \end{pmatrix} = (X\mathbf{1}_n - A)M(X)$$

e anche la matrice dei complementi algebrici è una matrice a elementi in $K[X]$.
Dalle due relazioni, si ricava $p_\phi(A) = (X\mathbf{1}_n - A)(M(X) - B(X))$, ove $D(X) = M(X) - B(X)$ è una matrice a elementi in $K[X]$ e il prodotto $(X\mathbf{1}_n - A)D(X)$ ha come risultato una matrice a elementi in K (ovvero $p_\phi(A)$).

[continua]
Ricordando la matrice dei complementi algebrici $M(X)$ e la regola di Laplace, si ha

$$p_\phi(X)\mathbf{1}_n = \begin{pmatrix} \det(X\mathbf{1}_n - A) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \det(X\mathbf{1}_n - A) \end{pmatrix} = (X\mathbf{1}_n - A)M(X)$$

e anche la matrice dei complementi algebrici è una matrice a elementi in $K[X]$.
Dalle due relazioni, si ricava $p_\phi(A) = (X\mathbf{1}_n - A)(M(X) - B(X))$, ove $D(X) = M(X) - B(X)$ è una matrice a elementi in $K[X]$ e il prodotto $(X\mathbf{1}_n - A)D(X)$ ha come risultato una matrice a elementi in K (ovvero $p_\phi(A)$).
Questa uguaglianza è possibile se, e solo se, $D(X) = 0$; infatti, se fosse $D(X) = D_0 + XD_1 + \cdots + X^r D_r$ con $D_j \in M_n(K)$, per $j = 0, \dots, r$, e $D_r \neq 0$, allora il prodotto $(X\mathbf{1}_n - A)D(X)$ sarebbe uguale a $X^{r+1}D_r +$ (termini di grado $\leq r$) e non potrebbe essere una matrice a elementi in K. Dunque, $D(X) = 0$ e $p_\phi(A) = 0$.
Infine, sia c un autovalore per ϕ (estendendo se necessario il campo K) e sia v un autovettore a esso relativo.
Indicato con $\lambda_\phi(X) = b_0 + b_1X + \cdots + X^m$ il polinomio minimo di ϕ, si ha che $\lambda_\phi(\phi)$ è l'endomorfismo nullo di V, e quindi

$$0 = \lambda_\phi(\phi)(v) = b_0v + b_1\phi(v) + \cdots + \phi^m(v) = (b_0 + b_1c + \cdots + c^m)v = \lambda_\phi(c)v.$$

Poiché $v \neq 0$, deve essere $\lambda_\phi(c) = 0$ e quindi ogni autovalore è anche una radice del polinomio minimo di ϕ. $\square$

Dunque, dato un endomorfismo $\phi : V \to V$, gli autovalori sono tutti e soli gli zeri del polinomio minimo di ϕ e si chiama *indice* dell'autovalore c la sua molteplicità come radice del polinomio minimo; ovvero il massimo esponente $i \in \mathbb{N}$ tale che $(X - c)^i$ divida $\lambda_\phi(X)$.

Lemma di decomposizione

Il risultato che stiamo per dimostrare lega la fattorizzazione di polinomi che stanno nel nucleo del morfismo di valutazione con la decomposizione dello spazio V in somma diretta di sottospazi ϕ-stabili, ovvero di sottospazi W di V su cui ϕ induce un endomorfismo ($\phi(w) \in W$, per ogni $w \in W$).

Lemma di decomposizione

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su K e $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Se $f_1(X), f_2(X), \dots, f_r(X)$ sono polinomi in $K[X]$, tali che

(a) se $i \neq j$, allora $MCD(f_i, f_j) = 1$;

(b) il prodotto $f_1 f_2 \cdots f_r$ appartiene al nucleo del morfismo di valutazione;

allora, posto $W_i = \ker(f_i(\phi))$, per $i = 1, \dots, r$, si ha $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r$ e ϕ induce un endomorfismo su ciascuno dei sottospazi.

Lemma di decomposizione

Il risultato che stiamo per dimostrare lega la fattorizzazione di polinomi che stanno nel nucleo del morfismo di valutazione con la decomposizione dello spazio V in somma diretta di sottospazi ϕ-stabili, ovvero di sottospazi W di V su cui ϕ induce un endomorfismo ($\phi(w) \in W$, per ogni $w \in W$).

Lemma di decomposizione

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su K e $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Se $f_1(X), f_2(X), \dots, f_r(X)$ sono polinomi in $K[X]$, tali che

(a) se $i \neq j$, allora $MCD(f_i, f_j) = 1$;

(b) il prodotto $f_1 f_2 \cdots f_r$ appartiene al nucleo del morfismo di valutazione;

allora, posto $W_i = \ker(f_i(\phi))$, per $i = 1, \dots, r$, si ha $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r$ e ϕ induce un endomorfismo su ciascuno dei sottospazi.

dim. Facendo ricorrenza sul numero r dei fattori, è sufficiente dimostrare il Lemma nel caso in cui $r = 2$. Infatti, se si suppone vero il lemma in questo caso, dati $f_1(X), f_2(X), \dots, f_r(X)$ soddisfacenti alle ipotesi, si possono considerare i due polinomi $f(X) = f_1(X)$ e $g(X) = f_2(X) \cdots f_r(X)$, che soddisfano alle ipotesi del lemma per $r = 2$, e decomporre lo spazio nella somma diretta $V = W + U$, ove $W = \ker(f(\phi))$ e $U = \ker(g(\phi))$.
Poiché ϕ induce un endomorfismo sul sottospazio U e i polinomi $f_2(X), \dots, f_r(X)$ soddisfano alle ipotesi del lemma (sul sottospazio U), possiamo applicare ricorsivamente lo stesso argomento fino ad esaurire i fattori. [segue]

[continua]
Dimostriamo quindi il lemma per $r = 2$.
Poiché $MCD(f_1, f_2) = 1$, esistono due polinomi $a_1(X)$ e $a_2(X)$ in $K[X]$ tali che $1 = a_1(X)f_1(X) + a_2(X)f_2(X)$. Applicando il morfismo di valutazione ai due membri dell'uguaglianza di ha

$$\mathrm{id}_V = a_1(\phi)f_1(\phi) + a_2(\phi)f_2(\phi), \quad \text{ovvero} \quad v = a_1(\phi)(f_1(\phi)(v)) + a_2(\phi)(f_2(\phi)(v)), \text{ per ogni } v \in V.$$

Si osservi che ϕ commuta con ogni endomorfismo del tipo $P(\phi)$, al variare di $P(X) \in K[X]$ e, più in generale, dati due polinomi, $P(X)$ e $Q(X)$ in $K[X]$, si ha $P(\phi)Q(\phi) = Q(\phi)P(\phi)$.
Quindi, il vettore $w_2 = a_1(\phi)(f_1(\phi)(v))$ appartiene a $W_2 = \ker(f_2(\phi))$, perché

$$f_2(\phi)(w_2) = f_2(\phi)((a_1(\phi)(f_1(\phi)(v))) = a_1(\phi)(f_1(\phi)f_2(\phi)(v)) = a_1(\phi)(0) = 0$$

dato che $f_1(\phi)f_2(\phi)$ è nel nucleo del morfismo di valutazione e quindi annulla ogni vettore di V.
Analogamente, il vettore $w_1 = a_2(\phi)(f_2(\phi)(v))$ appartiene a $W_1 = \ker(f_1(\phi))$. Dunque $V = W_1 + W_2$ e la somma è diretta, perché, se $v \in W_1 \cap W_2$, si ha

$$v = a_1(\phi)(f_1(\phi)(v)) + a_2(\phi)(f_2(\phi)(v)) = a_1(\phi)(0) + a_2(\phi)(0) = 0.$$

Infine, se $w \in W_1 = \ker f_1(\phi)$, allora $f_1(\phi)(\phi(w)) = \phi(f_1(\phi)(v)) = \phi(0) = 0$ e quindi $\phi(w) \in W_1$, ovvero il sottospazio è ϕ-stabile. Analoga verifica si fa per un generico vettore di W_2. □

Si osservi che, dalla dimostrazione del lemma per $r = 2$ discende che le proiezioni sugli addendi della decomposizione $V = W_1 \oplus W_2$ sono endomorfismi che si ottengono calcolando un polinomio in ϕ. Infatti, per quanto visto, la proiezione su $W_2 = \ker(f_2(\phi))$ (parallelamente a W_1) è l'endomorfismo $a_1(\phi)f_1(\phi)$. Analogamente, $a_2(\phi)f_2(\phi)$ è l'altra proiezione (...e nel caso in cui $r > 2$?).

Un altro criterio di diagonalizzabilità

Possiamo dimostrare un ulteriore criterio di diagonalizzabilità a partire dal polinomio minimo di un endomorfismo.

Proposizione [Secondo criterio di diagonalizzabilità]

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su K e $\phi : V \to V$ un'applicazione lineare. L'endomorfismo ϕ è diagonalizzabile su K se, e solo se, il polinomio minimo $\lambda_\phi(X)$ è prodotto di fattori lineari distinti in $K[X]$.

Un altro criterio di diagonalizzabilità

Possiamo dimostrare un ulteriore criterio di diagonalizzabilità a partire dal polinomio minimo di un endomorfismo.

Proposizione [Secondo criterio di diagonalizzabilità]

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su K e $\phi : V \to V$ un'applicazione lineare. L'endomorfismo ϕ è diagonalizzabile su K se, e solo se, il polinomio minimo $\lambda_\phi(X)$ è prodotto di fattori lineari distinti in $K[X]$.

dim. Se ϕ è diagonalizzabile e $a_1, \dots, a_r$ sono i suoi autovalori, a due a due distinti, e appartenenti al campo K, allora il polinomio $(X - a_1) \cdots (X - a_r)$ appartiene al nucleo del morfismo di valutazione (come si può vedere calcolandolo nella matrice diagonale di ϕ) e quindi $\lambda_\phi(X)$ è prodotto di fattori lineari distinti in $K[X]$.
Viceversa, se $\lambda_\phi(X) = (X - a_1) \cdots (X - a_r)$, con $a_1, \dots, a_r$ a due a due distinti, i fattori di questo prodotto sono a due a due coprimi e, applicando il lemma di decomposizione, si ottiene che

$$V = \ker(\phi - a_1 \mathrm{id}_V) \oplus \cdots \oplus \ker(\phi - a_r \mathrm{id}_V);$$

e quindi esiste una base di V fatta di autovettori per ϕ. $\square$

Esempio : Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione finita e $\phi : V \to V$ un endomorfismo tale che $\phi^k = \mathrm{id}_V$ per qualche intero positivo k. Allora ϕ è diagonalizzabile.

Svolg.: Il polinomio $X^k - 1$ appartiene al nucleo del morfismo di valutazione ed è un prodotto di fattori lineari distinti (Formula di De Moivre); quindi il polinomio minimo $\lambda_\phi(X)$, che divide $X^k - 1$, è anch'esso prodotto di fattori lineari distinti in $\mathbb{C}[X]$. $\square$

Autovettori generalizzati

Vogliamo ottenere una forma canonica triangolare più raffinata per gli endomorfismi che hanno tutti gli autovalori nel campo. Per fare ciò introduciamo le nozioni di autovettore generalizzato e autospazio generalizzato associato a un autovalore.

Proposizione

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su K, $\phi : V \to V$ un endomorfismo e $p_\phi(X) = (X - a_1)^{m_1} \cdots (X - a_r)^{m_r}$ il suo polinomio caratteristico, ove gli autovalori $a_1, \dots, a_r$ sono a due a due distinti. Allora

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r, \quad \text{ove } W_i = \ker\left(\phi - a_i \mathrm{id}_V\right)^{m_i}, \text{ per } i = 1, \dots, r.$$

Gli addendi sono sottospazi ϕ-stabili e $\dim_K W_i = m_i$.

Autovettori generalizzati

Vogliamo ottenere una forma canonica triangolare più raffinata per gli endomorfismi che hanno tutti gli autovalori nel campo. Per fare ciò introduciamo le nozioni di autovettore generalizzato e autospazio generalizzato associato a un autovalore.

Proposizione

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su K, $\phi : V \to V$ un endomorfismo e $p_\phi(X) = (X - a_1)^{m_1} \cdots (X - a_r)^{m_r}$ il suo polinomio caratteristico, ove gli autovalori $a_1, \dots, a_r$ sono a due a due distinti. Allora

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r, \quad \text{ove } W_i = \ker\left(\phi - a_i \mathrm{id}_V\right)^{m_i}, \text{ per } i = 1, \dots, r.$$

Gli addendi sono sottospazi ϕ-stabili e $\dim_K W_i = m_i$.

dim. Per il Teorema di Hamilton-Cayley $p_\phi(X)$ appartiene al nucleo del morfismo di valutazione e i fattori che compaiono nella decomposizione scritta sopra sono a due a due coprimi. Applicando il Lemma di decomposizione si ha quindi la decomposizione dell'enunciato e gli addendi sono sottospazi ϕ-stabili.
Usando come base di V l'unione di basi dei vari addendi, si ottiene per ϕ una matrice a blocchi diagonali e quindi il polinomio caratteristico di ϕ (su V) è il prodotto dei polinomi caratteristici delle restrizioni di ϕ ai sottospazi W_i. La restrizione di ϕ al sottospazio $W_i = \ker\left(\phi - a_i \mathrm{id}_V\right)^{m_i}$ non può avere autovalori diversi da a_i. Infatti, se $w \in W_i$ è un autovettore $\phi(w) = cw$, dalla condizione $0 = (\phi - a_i \mathrm{id}_V)^{m_i}(w) = (c - a_i)^{m_i} w$, si ricava $(c - a_i)^{m_i} = 0$ e quindi $c = a_i$. Dunque, il fattore $(X - a_i)^{m_i}$ del polinomio caratteristico è il polinomio caratteristico della restrizione di ϕ a W_i e il suo grado è quindi $\dim_K W_i$. □

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su K, $\phi : V \to V$ un endomorfismo e c un autovalore di ϕ, di molteplicità algebrica m. Il sottospazio $W = \ker\,(\phi - c\,\mathrm{id}_V)^m$ è l'*autospazio generalizzato* relativo all'autovalore c e i suoi elementi non nulli sono gli *autovettori generalizzati* relativi a c. Il *periodo* di un autovettore generalizzato w è l'esponente positivo r tale che $w \in \ker\,(\phi - c\,\mathrm{id}_V)^r$, ma $w \notin \ker\,(\phi - c\,\mathrm{id}_V)^{r-1}$.

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su K, $\phi : V \to V$ un endomorfismo e c un autovalore di ϕ, di molteplicità algebrica m. Il sottospazio $W = \ker(\phi - c\,\mathrm{id}_V)^m$ è l'*autospazio generalizzato* relativo all'autovalore c e i suoi elementi non nulli sono gli *autovettori generalizzati* relativi a c. Il *periodo* di un autovettore generalizzato w è l'esponente positivo r tale che $w \in \ker(\phi - c\,\mathrm{id}_V)^r$, ma $w \notin \ker(\phi - c\,\mathrm{id}_V)^{r-1}$.

Gli autovettori generalizzati di periodo 1 sono gli usuali autovettori e, per ogni autovettore generalizzato, il periodo non può superare la dimensione dell'autospazio generalizzato. Più precisamente, si ha

Proposizione

Siano V uno spazio vettoriale di dimensione n su K, $\phi : V \to V$ un endomorfismo, c un autovalore di ϕ e w è un autovettore generalizzato di periodo r, relativo a c. Allora i vettori $w, (\phi - c\,\mathrm{id}_V)(w), \dots, (\phi - c\,\mathrm{id}_V)^{r-1}(w)$ sono linearmente indipendenti.

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su K, $\phi : V \to V$ un endomorfismo e c un autovalore di ϕ, di molteplicità algebrica m. Il sottospazio $W = \ker(\phi - c\,\mathrm{id}_V)^m$ è l'*autospazio generalizzato* relativo all'autovalore c e i suoi elementi non nulli sono gli *autovettori generalizzati* relativi a c. Il *periodo* di un autovettore generalizzato w è l'esponente positivo r tale che $w \in \ker(\phi - c\,\mathrm{id}_V)^r$, ma $w \notin \ker(\phi - c\,\mathrm{id}_V)^{r-1}$.

Gli autovettori generalizzati di periodo 1 sono gli usuali autovettori e, per ogni autovettore generalizzato, il periodo non può superare la dimensione dell'autospazio generalizzato. Più precisamente, si ha

Proposizione

Siano V uno spazio vettoriale di dimensione n su K, $\phi : V \to V$ un endomorfismo, c un autovalore di ϕ e w è un autovettore generalizzato di periodo r, relativo a c. Allora i vettori $w, (\phi - c\,\mathrm{id}_V)(w), \dots, (\phi - c\,\mathrm{id}_V)^{r-1}(w)$ sono linearmente indipendenti.

dim. (*a*) Sia $a_0 w + a_1(\phi - c\,\mathrm{id}_V)(w) + \cdots + a_{r-1}(\phi - c\,\mathrm{id}_V)^{r-1}(w) = 0$ e applichiamo ai due membri dell'uguaglianza l'endomorfismo $(\phi - c\,\mathrm{id}_V)^{r-1}$. A sinistra dell'uguale, tutti gli addendi, ad eccezione del primo, si annullano perché $(\phi - c\,\mathrm{id}_V)^k(w) = 0$ per $k \geq r$; si ottiene quindi l'uguaglianza $a_0(\phi - c\,\mathrm{id}_V)^{r-1}(w) = 0$, che implica $a_0 = 0$, perché il vettore $(\phi - c\,\mathrm{id}_V)^{r-1}(w) \neq 0$. Cancellato il primo termine dalla combinazione lineare, possiamo applicare ai due membri l'endomorfismo $(\phi - c\,\mathrm{id}_V)^{r-2}$ e ottenere analogamente che $a_1 = 0$. Proseguendo in modo analogo, tutti i coefficienti della combinazione lineare devono essere nulli. $\square$

Mettiamo in evidenza qui una prima conseguenza delle osservazioni fatte finora, dimostrando il cosiddetto *Lemma del vettore ciclico*.

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su K e $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Il vettore $v \in V$ è detto un *vettore ciclico* per ϕ, se i vettori $v, \phi(v), \dots, \phi^{n-1}(v)$ sono una base dello spazio vettoriale V.

Mettiamo in evidenza qui una prima conseguenza delle osservazioni fatte finora, dimostrando il cosiddetto *Lemma del vettore ciclico*.

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su K e $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Il vettore $v \in V$ è detto un *vettore ciclico* per ϕ, se i vettori $v, \phi(v), \dots, \phi^{n-1}(v)$ sono una base dello spazio vettoriale V.

Non è vero che per ogni endomorfismo esista un vettore ciclico. Nella successiva Proposizione diamo una condizione necessaria e sufficiente per la sua esistenza. Per semplicità supporremo che l'endomorfismo abbia tutti gli autovalori nel campo, ma questa condizione non è necessaria (si veda ad esempio l'Appendice C del libro) .

Proposizione

Siano V uno spazio vettoriale di dimensione n su K e $\phi : V \to V$ un endomorfismo triangolarizzabile.

(a) Per ogni autovalore c di ϕ l'indice è uguale al massimo periodo di un autovettore generalizzato relativo a c.

(b) Esiste un vettore ciclico per ϕ se, e solo se, il polinomio minimo di ϕ coincide con il polinomio caratteristico.

dim. (*a*) Ricordiamo che l'indice dell'autovalore c è l'esponente massimo k tale che $(X-c)^k \mid \lambda_\phi(X)$ e, per il teorema di Hamilton-Cayley, $k \leq m$, ove m è la molteplicità algebrica di c. Sia W l'autospazio generalizzato relativo all'autovalore c e sia $f(X)$ un polinomio con $f(c) \neq 0$. Allora
$1 = MCD(f(X), (X-c)^m) = a(X)f(X) + b(X)(X-c)^m$, quindi, per ogni
$w \in W = \ker{(\phi - c\mathrm{id})^m}$, si ha $w = a(\phi)f(\phi)(w)$ e perciò $f(\phi)$ ristretto a W è un isomorfismo.

dim. (*a*) Ricordiamo che l'indice dell'autovalore c è l'esponente massimo k tale che $(X-c)^k \mid \lambda_\phi(X)$ e, per il teorema di Hamilton-Cayley, $k \le m$, ove m è la molteplicità algebrica di c. Sia W l'autospazio generalizzato relativo all'autovalore c e sia $f(X)$ un polinomio con $f(c) \neq 0$. Allora
$1 = MCD(f(X), (X-c)^m) = a(X)f(X) + b(X)(X-c)^m$, quindi, per ogni
$w \in W = \ker\,(\phi - c\mathrm{id})^m$, si ha $w = a(\phi)f(\phi)(w)$ e perciò $f(\phi)$ ristretto a W è un isomorfismo.
Ora, se k è l'indice dell'autovalore c, $\lambda_\phi(X) = g(X)(X-c)^k$, con $g(c) \neq 0$ e quindi per ogni autovettore generalizzato relativo a c, $w \in W$, si ha

$$0 = \lambda_\phi(\phi)(w) = g(\phi)((\phi - c\mathrm{id})^k(w)) \iff (\phi - c)^k(w) = 0$$

perché $g(\phi)$ ristretto a W è un isomorfismo. Dunque ogni autovettore generalizzato ha periodo minore o uguale all'indice k e la decomposizione in autospazi generalizzati coincide con la decomposizione associata alla fattorizzazione del polinomio minimo $\lambda_\phi(X)$, per cui $V = W \oplus U$, ove $U = \ker\,(g(\phi))$.

dim. (*a*) Ricordiamo che l'indice dell'autovalore c è l'esponente massimo k tale che $(X-c)^k \mid \lambda_\phi(X)$ e, per il teorema di Hamilton-Cayley, $k \leq m$, ove m è la molteplicità algebrica di c. Sia W l'autospazio generalizzato relativo all'autovalore c e sia $f(X)$ un polinomio con $f(c) \neq 0$. Allora
$1 = MCD(f(X), (X-c)^m) = a(X)f(X) + b(X)(X-c)^m$, quindi, per ogni
$w \in W = \ker\,(\phi - c\mathrm{id})^m$, si ha $w = a(\phi)f(\phi)(w)$ e perciò $f(\phi)$ ristretto a W è un isomorfismo.
Ora, se k è l'indice dell'autovalore c, $\lambda_\phi(X) = g(X)(X-c)^k$, con $g(c) \neq 0$ e quindi per ogni autovettore generalizzato relativo a c, $w \in W$, si ha

$$0 = \lambda_\phi(\phi)(w) = g(\phi)((\phi - c\mathrm{id})^k(w)) \iff (\phi - c)^k(w) = 0$$

perché $g(\phi)$ ristretto a W è un isomorfismo. Dunque ogni autovettore generalizzato ha periodo minore o uguale all'indice k e la decomposizione in autospazi generalizzati coincide con la decomposizione associata alla fattorizzazione del polinomio minimo $\lambda_\phi(X)$, per cui $V = W \oplus U$, ove $U = \ker\,(g(\phi))$.
Mostriamo ora che deve esistere almeno un elemento dell'autospazio generalizzato W di periodo esattamente uguale all'indice k. Infatti, se per ogni autovettore generalizzato w si avesse $(\phi - c)^{k-1}(w) = 0$, posto $F(X) = (X-c)^{k-1}g(X)$ avremmo un polinomio di grado minore del grado di $\lambda_\phi(X)$ e, per ogni vettore $v \in V$ si ha $v = w + u$, con $w \in W$ e $u \in U$, per cui

$$F(\phi)(v) = g(\phi)(\phi - c\mathrm{id})^{k-1}(w) + (\phi - c\mathrm{id})^{k-1}g(\phi)(u) = 0 + 0 = 0;$$

che contraddice il fatto che $\lambda_\phi(X)$ sia il polinomio minimo.

dim. (*a*) Ricordiamo che l'indice dell'autovalore c è l'esponente massimo k tale che $(X-c)^k \mid \lambda_\phi(X)$ e, per il teorema di Hamilton-Cayley, $k \leq m$, ove m è la molteplicità algebrica di c. Sia W l'autospazio generalizzato relativo all'autovalore c e sia $f(X)$ un polinomio con $f(c) \neq 0$. Allora
$1 = MCD(f(X), (X-c)^m) = a(X)f(X) + b(X)(X-c)^m$, quindi, per ogni
$w \in W = \ker(\phi - c\mathrm{id})^m$, si ha $w = a(\phi)f(\phi)(w)$ e perciò $f(\phi)$ ristretto a W è un isomorfismo.
Ora, se k è l'indice dell'autovalore c, $\lambda_\phi(X) = g(X)(X-c)^k$, con $g(c) \neq 0$ e quindi per ogni autovettore generalizzato relativo a c, $w \in W$, si ha

$$0 = \lambda_\phi(\phi)(w) = g(\phi)((\phi - c\mathrm{id})^k(w)) \iff (\phi - c)^k(w) = 0$$

perché $g(\phi)$ ristretto a W è un isomorfismo. Dunque ogni autovettore generalizzato ha periodo minore o uguale all'indice k e la decomposizione in autospazi generalizzati coincide con la decomposizione associata alla fattorizzazione del polinomio minimo $\lambda_\phi(X)$, per cui $V = W \oplus U$, ove $U = \ker(g(\phi))$.
Mostriamo ora che deve esistere almeno un elemento dell'autospazio generalizzato W di periodo esattamente uguale all'indice k. Infatti, se per ogni autovettore generalizzato w si avesse $(\phi - c)^{k-1}(w) = 0$, posto $F(X) = (X-c)^{k-1}g(X)$ avremmo un polinomio di grado minore del grado di $\lambda_\phi(X)$ e, per ogni vettore $v \in V$ si ha $v = w + u$, con $w \in W$ e $u \in U$, per cui

$$F(\phi)(v) = g(\phi)(\phi - c\mathrm{id})^{k-1}(w) + (\phi - c\mathrm{id})^{k-1}g(\phi)(u) = 0 + 0 = 0;$$

che contraddice il fatto che $\lambda_\phi(X)$ sia il polinomio minimo.

(*b*) Se $\lambda_\phi(X) = a_0 + a_1X + \cdots + X^s$ è il polinomio minimo, allora, per ogni vettore $v \in V$, si ha

$$0 = \lambda_\phi(\phi)(v) = a_0v + a_1\phi(v) + \cdots + \phi^s(v);$$

e i vettori $v, \phi(v), \ldots, \phi^s(v)$ sono linearmente dipendenti. Dunque, se esiste un vettore ciclico, il grado di $\lambda_\phi(X)$ deve essere uguale a $n = \dim_K V$ e quindi $\lambda_\phi(X) = p_\phi(X)$ (Hamilton-Cayley). [segue]

[continua]
Finalmente, se $\lambda_\phi(X) = p_\phi(X) = (X - a_1)^{m_1} \cdots (X - a_r)^{m_r}$ (con gli autovalori a due a due distinti), per ogni $i = 1, \dots, r$, si prenda un autovettore generalizzato w_i (relativo ad a_i) di periodo massimo m_i e sia $v = w_1 + \cdots + w_r$. Vogliamo verificare che v è il vettore ciclico cercato, ovvero che i vettori $v, \phi(v), \dots, \phi^{n-1}(v)$ sono linearmente indipendenti.
Infatti, data una relazione di dipendenza $a_0 v + a_1\phi(v) + \cdots + a_r\phi^r(v) = 0$, e considerato il polinomio $G(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_r X^r \in K[X]$; allora poiché gli autospazi generalizzati sono in somma diretta, deve aversi

$$G(\phi)(w_i) = 0, \qquad \text{e dunque} \qquad (X - a_i)^{m_i} \mid G(X), \text{ per ogni } i = 1, \dots, r,$$

per cui $\deg(G(X)) \geq m_1 + \cdots + m_r = n = \deg p_\phi(X) = \dim_K V$, oppure $G(X)$ ha tutti i coefficienti nulli. □

Osserviamo che, se esiste un vettore ciclico v_0 per l'endomorfismo $\phi : V \to V$, con polinomio minimo (e caratteristico) $F(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$; allora, presa la base associata al vettore ciclico $\mathcal{V} = \{ v_0, \phi(v_0), \dots, \phi^{n-1}(v_0) \}$, la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ è uguale a

$$\boxed{C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad [\textit{matrice compagna} \text{ di } F(X)].}$$

Per ogni polinomio $F(X) \in K[X]$, di grado $n > 0$ possiamo considerare la matrice compagna in $M_n(K)$ e il polinomio caratteristico e il polinomio minimo di tale

Blocchi di Jordan

Gli autovettori generalizzati sono gli elementi con cui costruiremo una base rispetto a cui un endomorfismo triangolarizzabile ha una forma triangolare molto semplice e utile nelle applicazioni: la forma canonica di Jordan. Cominciamo col definire i "mattoni fondamentali" di questa costruzione, i cosiddetti *blocchi di Jordan*.

Proposizione

Siano V uno spazio vettoriale di dimensione n su K, $\phi : V \to V$ un endomorfismo, c un autovalore di ϕ e w è un autovettore generalizzato di periodo r, relativo a c. Allora il sottospazio $U = \left\langle w, (\phi - c\mathrm{id}_V)(w), \dots, (\phi - c\mathrm{id}_V)^{r-1}(w) \right\rangle$ è ϕ-stabile e, in un'opportuna base, la matrice della restrizione di ϕ a U è

$$J_r(c) = \begin{pmatrix} c & 1 & \dots & 0 \\ 0 & c & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & c \end{pmatrix} \qquad \left[\textit{Blocco di Jordan} \text{ di ordine } r\right].$$

dim. Poiché w ha periodo r, i vettori $u_i = (\phi - c\mathrm{id}_V)^{r-i}(w)$, per $i = 1, \dots, r$ sono una base $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_r\}$ di U, e si ha $\phi(u_i) = cu_i + (\phi - c\mathrm{id})(u_i)$, per $i = 1, \dots, r$; poiché $(\phi - c\mathrm{id}_V)^r(w) = 0$, ciò significa che ϕ induce un endomorfismo su U e, precisamente,

$$\boxed{\begin{aligned} \phi(u_1) &= cu_1 \\ \phi(u_2) &= cu_2 + u_1 \\ &\vdots \\ \phi(u_i) &= cu_i + u_{i-1} \\ &\vdots \\ \phi(u_r) &= cu_r + u_{r-1} \end{aligned}} \quad \text{ovvero} \quad \boxed{\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\phi_{|U}) = J_r(c) = \begin{pmatrix} c & 1 & \dots & 0 \\ 0 & c & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & c \end{pmatrix}}$$

che ci dà la matrice voluta. □

Nel seguito mostreremo come, dato un endomorfismo con tutti gli autovalori nel campo, si possa trovare una base rispetto a cui la matrice dell'endomorfismo è fatta di blocchi di Jordan (di vario ordine), disposti sulla diagonale principale.

Esempio: Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$ di matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ in base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$.

(a) Si determinino autovalori e autospazi per A.

(b) Si determini, se esiste, una base tale che la matrice di ϕ sia un blocco di Jordan, J, e si determini una matrice invertibile P tale che $J = P^{-1}AP$.

Svolg.: (*a*) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X-3)^4$; quindi vi è un unico autovalore con molteplicità algebrica 4 e molteplicità geometrica 1, dato che $A - 3\mathbf{1}$ ha rango 3. L'autospazio è $\ker(\phi - 3\mathrm{id}) = \langle e_2 + e_4 \rangle$. (*b*) Si ha $(A - 3\mathbf{1})^4 = 0$ (Hamilton-Cayley ... o verifica diretta!) e inoltre,

$$(A - 3\mathbf{1}) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ (A - 3\mathbf{1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \ (A - 3\mathbf{1})^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque il polinomio minimo di ϕ coincide con il polinomio caratteristico e il vettore e_1 (ma non solo! come indicarli tutti?) è un autovettore generalizzato di periodo 4. Posto quindi

$$\begin{aligned} u_1 &= (\phi - 3\mathrm{id})^3(e_1) = 4e_2 + 4e_4, \qquad u_2 = (\phi - 3\mathrm{id})^2(e_1) = -7e_2 - 3e_4, \\ u_3 &= (\phi - 3\mathrm{id})(e_1) = -4e_1 + 4e_3 + e_4, \qquad u_4 = e_1, \end{aligned}$$

si ha la base $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_4\}$ di $\mathbb{Q}^4$ tale che $J = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\phi) = J_4(3)$. Dunque

$$J = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\phi) = J_4(3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esempio : Si consideri l'endomorfismo $\phi : V \to V$ di matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ di V.

(a) Si determinino polinomio caratteristico, autovalori e autospazi per ϕ.

(b) Si determini il polinomio minimo di ϕ e si determini, se esiste, un vettore ciclico per ϕ.

(c) Si determini, se esiste, una base tale che la matrice J di ϕ sia costituita da uno o più blocchi di Jordan. Nel caso si determini la matrice J e una matrice invertibile P tale che $J = P^{-1}AP$.

Svolg.: (*a*) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X-1)^2(X-2)^2$; quindi vi sono gli autovalori 1 e 2, entrambi con molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1. Infatti le due matrici

$$A - \mathbf{1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A - 2\mathbf{1} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

hanno rango 3 e i rispettivi autospazi sono $\ker(\phi - \mathrm{id}) = \langle v_2 - v_4 \rangle$ e $\ker(\phi - 2\mathrm{id}) = \langle v_1 - v_3 \rangle$.
(*b*) Applicando il lemma di decomposizione al polinomio caratteristico, si ha $V = W_1 \oplus W_2$, ove i due autospazi generalizzati, $W_1 = \ker(\phi - \mathrm{id})^2$ e $W_2 = \ker(\phi - 2\mathrm{id})^2$ hanno dimensione 2 e devono contenere autovettori generalizzati di periodo 2 perché gli autovalori non sono sufficienti a generarli. Ricordando il teorema di Hamilton-Cayley, il polinomio minimo deve essere $\lambda_\phi(X) = (X-1)^2(X-2)^2 = p_\phi(X)$ e quindi esiste un vettore ciclico e si ottiene prendendo un autovettore generalizzato di periodo massimo in ciascun autospazio generalizzato e sommandoli tra loro. Andiamo a determinarlo più sotto. [segue]

[continua]
(c) Per avere blocchi di Jordan dobbiamo determinare delle basi dei diversi autospazi generalizzati e, in questo caso, il calcolo è molto semplice. Dal polinomio minimo si ricava che $(A - 2\mathbf{1})^2(A - \mathbf{1})^2 = \mathbf{0}$ e perciò che $\mathrm{im}\,(\phi - \mathrm{id})^2 \subseteq \ker\,(\phi - 2\mathrm{id})^2$; avendo la stessa dimensione i due sottospazi devono coincidere, per cui è sufficiente calcolare $(A - \mathbf{1})^2$ per determinare dei generatori dei due autospazi generalizzati. Si ha quindi

$$(A - \mathbf{1})^2 = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{dunque} \qquad \begin{aligned} \ker\,(\phi - \mathrm{id})^2 &= \langle v_2, v_4 \rangle \\ \mathrm{im}\,(\phi - \mathrm{id})^2 &= \langle v_1 - v_3, v_2 - v_3 - v_4 \rangle\,. \end{aligned}$$

Se prendiamo la base $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_4\}$, definita da

$$u_4 = v_2 - v_3 - v_4, \quad u_3 = (\phi - 2\mathrm{id})(u_4) = 4v_1 - 4v_3, \quad u_2 = v_4, \quad u_1 = (\phi - \mathrm{id})(u_2) = -2v_2 + 2v_4,$$

si ottengono le due matrici cercate, ovvero

$$J = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dunque, un possibile vettore ciclico per ϕ è $v = u_2 + u_4 = v_2 - v_3$ (verificare che $v, \phi(v), \phi^2(v), \phi^3(v)$ sono linearmente indipendenti). $\square$

Esempio: Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

(a) Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) Si determinino una matrice a blocchi di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

Svolg.: (*a*) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X+2)^5$ e -2 è l'unico autovalore, con molteplicità (algebrica) 5. I relativi autovettori generano il sottospazio $\ker(\phi + 2\mathrm{id}) = \langle e_1 + e_3, 5e_1 - e_2 - e_5 \rangle$. Si ha

$$A + 2\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad (A + 2\mathbf{1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & -15 & 0 & -3 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 & -3 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A + 2\mathbf{1})^3 = \mathbf{0}_5.$$

dunque il polinomio minimo è $\lambda_\phi(X) = (X+2)^3$.

(*b*) Si ha $\mathrm{rk}(\phi + 2\mathrm{id}) = 3$ e $\mathrm{rk}(\phi + 2\mathrm{id})^2 = 1$, per cui vi è un blocco di Jordan ordine 3 e uno di ordine 2. Il vettore $u_3 = e_4$ è un autovettore generalizzato di periodo 3 per l'autovalore -2 e si pone $u_2 = (\phi + 2\mathrm{id})(u_3) = 3e_3$ e $u_1 = (\phi + 2\mathrm{id})^2(u_3) = -3e_1 - 3e_3$. Il vettore $u_5 = 5e_4 + e_5$, appartiene a $\ker(\phi + 2\mathrm{id})^2$, ma non al sottospazio $\langle u_2 \rangle \oplus \ker(\phi + 2\mathrm{id})$. Aggiungendo il vettore $u_4 = (\phi + 2\mathrm{id})(u_5) = 5e_1 + 3e_2 + 20e_3 + 3e_5$, si ottiene la base $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_5\}$ rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan. Le matrici cercate sono, ad esempio,

$$J = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\phi) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teorema di Jordan

Cerchiamo ora di dare una forma precisa a quanto visto negli esempi precedenti ed enunciamo il risultato fondamentale di questa sezione.

Teorema (Camille Jordan)

Sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo K e i cui autovalori siano tutti in K. Allora esiste una base di V rispetto a cui la matrice di ϕ è triangolare e costituita di blocchi di Jordan sulla diagonale. Tale matrice è univocamente determinata da ϕ a meno dell'ordine dei blocchi.
In particolare, per ogni autovalore c di ϕ:

(a) la somma degli ordini dei blocchi di Jordan di autovalore c è uguale alla molteplicità algebrica dell'autovalore;

(b) il numero di blocchi di Jordan relativi all'autovalore c è uguale alla molteplicità geometrica dell'autovalore;

(c) il massimo ordine di un blocco di Jordan relativo all'autovalore c è uguale all'indice dell'autovalore.

L'endomorfismo ϕ è quindi somma di un endomorfismo diagonalizzabile e di uno nilpotente che sono entrambi polinomiali in ϕ e quindi commutano.

La dimostrazione del Teorema ci occuperà nel seguito di questa sezione.
Cominciamo con due osservazioni importanti

Nelle ipotesi del Teorema, $p_\phi(X) = (X - c_1)^{m_1} \cdots (X - c_r)^{m_r}$, con $c_1, \dots, c_r$, autovalori a due a due distinti. Applicando il *Lemma di decomposizione*, $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$ con $W_i = \ker(\phi - c_i \mathrm{id}_V)^{m_i}$, per $i = 1, \dots, r$, autospazio generalizzato, di dimensione m_i, e ϕ-stabile. Inoltre, la proiezione sul sottospazio W_i parallelamente alla somma dei rimanenti è un'applicazione polinomiale in ϕ.

Restringendosi all'autospazio generalizzato W, relativo all'autovalore c, si ha

$$\phi_{|W} = c\mathrm{id}_W + (\phi_{|W} - c\mathrm{id}_W).$$

I due addendi commutano e sono polinomiali in ϕ, perché lo è la proiezione sull'autospazio generalizzato. Inoltre, l'endomorfismo $c\mathrm{id}_W : W \to W$ ha matrice scalare $c\mathbf{1}$, rispetto a qualsiasi base di W.

Dunque è sufficiente dimostrare il teorema per un unico autovalore e quindi per un endomorfismo nilpotente, ovvero nel caso in cui l'autovalore sia lo 0.

Sia W uno spazio vettoriale di dimensione finita e $\phi : W \to W$ un endomorfismo nilpotente di indice h. Consideriamo la *filtrazione dei nuclei* ovvero la successione crescente di sottospazi

$$\langle 0 \rangle = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_h = W, \qquad \text{ove } K_i = \ker \phi^i, \ \text{per } i = 0, \ldots, h.$$

Tutte le inclusioni nella filtrazione sono inclusioni strette.

Se $\ker \phi^i = \ker \phi^{i+1}$ per qualche indice i, allora $\ker \phi^j = \ker \phi^i$ per ogni intero $j \geq i$.
Infatti, se $v \in \ker \phi^j$ per $j > i$, allora

$$0 = \phi^j(v) = \phi^{i+1}(\phi^{j-i-1}(v)) = \phi^i(\phi^{j-i-1}(v)) = \phi^{j-1}(v);$$

perché $\phi^{j-i-1}(v) \in \ker \phi^{i+1} = \ker \phi^i$. Dunque, $v \in \ker \phi^{j-1}$; se $j - 1 = i$, abbiamo finito. Altrimenti, $j - 1 > i$ e possiamo continuare analogamente, fino a ottenere $v \in \ker \phi^i$.
La conoscenza delle dimensioni dei sottospazi K_i che costituiscono la filtrazione permette di determinare i vari blocchi e quindi la matrice di Jordan di ϕ.

La costruzione si deduce dal seguente Lemma.

Lemma

Siano W uno spazio vettoriale sul campo K e $\phi\colon W \to W$ un endomorfismo nilpotente di indice h. Indicata con $\langle 0\rangle = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_h = W$ la filtrazione dei nuclei, esiste una famiglia di sottospazi, $H_1, \dots, H_h$, di W, soddisfacenti alle condizioni seguenti.

(a) $K_{j+1} = H_{j+1} \oplus K_j$ per $j = 0, \dots, h-1$;

(b) $\phi(H_{j+1}) \subseteq H_j$ e la restrizione di ϕ ad H_{j+1} è iniettiva, per $j = 1, \dots, h-1$;

(c) $W = H_1 \oplus \cdots \oplus H_h$.

dim. Se $h = 1$, non c'è niente da dimostrare, perché $\phi = 0$ (endomorfismo nullo) e $W = H_1 = \ker\phi$. Sia quindi $h \geq 2$. Poiché $\ker\phi^{h-1} \subset \ker\phi^h = W$, sia H_h un sottospazio complementare a $\ker\phi^{h-1}$, ovvero sia $W = \ker\phi^{h-1} \oplus H_h$; e osserviamo che, essendo $\ker\phi \subseteq \ker\phi^{h-1}$, si ha che $\phi_{|H_h}$ è iniettivo (precisamente, $\ker\phi_{|H_h} = \ker\phi \cap H_h \subseteq \ker\phi^{h-1} \cap H_h = \langle 0\rangle$).

Se $h = 2$ abbiamo concluso, altrimenti, sia H_h come sopra e si considerino i sottospazi $\phi(H_h) \subseteq \ker\phi^{h-1}$ e $\ker\phi^{h-2} \subset \ker\phi^{h-1}$. I due sottospazi hanno intersezione banale e quindi esiste un sottospazio $H_{h-1} \supseteq \phi(H_h)$ tale che $\ker\phi^{h-1} = \ker\phi^{h-2} \oplus H_{h-1}$ e, ragionando come sopra, si ha che $\phi_{|H_{h-1}}$ è iniettivo. Inoltre,

$$W = \ker\phi^{h-2} \oplus H_{h-1} \oplus H_h,$$

dunque, se $h = 3$ abbiamo concluso, altrimenti procediamo in modo analogo fino a ottenere la decomposizione richiesta. □

Mostriamo come costruire la base cercata a partire dalla decomposizione $W = H_1 \oplus \cdots \oplus H_h$ del Lemma.

- Se $h = 1$ qualunque base di $W = H_1$ va bene.

Mostriamo come costruire la base cercata a partire dalla decomposizione $W = H_1 \oplus \cdots \oplus H_h$ del Lemma.

• Se $h = 1$ qualunque base di $W = H_1$ va bene.

• Sia $h > 1$ e siano $w_1, \dots, w_{\alpha_h}$, una base del sottospazio H_h, (ove $\alpha_h = \dim K_h - \dim K_{h-1} = \operatorname{rk} \phi^{h-1}$). Ognuno di questi vettori è un autovettore generalizzato di periodo h e dà origine a un blocco di Jordan di ordine h. I vettori $\phi(w_1), \dots, \phi(w_{\alpha_c})$ sono in H_{h-1} e sono ancora linearmente indipendenti, perché $\phi_{|H_h}$ è iniettiva e appartengono a K_{h-1} che è un complementare di H_h; quindi uniti ai precedenti vettori formano un insieme di vettori indipendenti. Se $\dim{}_K H_h = \dim{}_K H_{h-1}$, abbiamo terminato questo passo e non ci sono blocchi di ordine esattamente $h-1$ nella matrice di Jordan di ϕ.

Mostriamo come costruire la base cercata a partire dalla decomposizione $W = H_1 \oplus \cdots \oplus H_h$ del Lemma.

• Se $h = 1$ qualunque base di $W = H_1$ va bene.

• Sia $h > 1$ e siano $w_1, \dots, w_{\alpha_h}$, una base del sottospazio H_h, (ove $\alpha_h = \dim K_h - \dim K_{h-1} = \operatorname{rk} \phi^{h-1}$). Ognuno di questi vettori è un autovettore generalizzato di periodo h e dà origine a un blocco di Jordan di ordine h. I vettori $\phi(w_1), \dots, \phi(w_{\alpha_c})$ sono in H_{h-1} e sono ancora linearmente indipendenti, perché $\phi_{|H_h}$ è iniettiva e appartengono a K_{h-1} che è un complementare di H_h; quindi uniti ai precedenti vettori formano un insieme di vettori indipendenti. Se $\dim_K H_h = \dim_K H_{h-1}$, abbiamo terminato questo passo e non ci sono blocchi di ordine esattamente $h - 1$ nella matrice di Jordan di ϕ. Altrimenti, si ha

$$\alpha_h = \dim_K H_h < \dim_K H_{h-1} = \dim K_{h-1} - \dim K_{h-2} = \operatorname{rk} \phi^{h-2} - \operatorname{rk} \phi^{h-1} = \alpha_{h-1},$$

e dobbiamo aggiungere dei vettori $w_{\alpha_h+1}, \dots, w_{\alpha_{h-1}}$ che completino $\phi(w_1), \dots, \phi(w_{\alpha_h})$ a una base di H_{h-1}. Ognuno dei vettori aggiunti è un autovettore generalizzato di periodo $h - 1$ e dà origine a un blocco di Jordan di ordine $h - 1$ e, se $h = 2$, abbiamo terminato.

Altrimenti, proseguiamo analogamente, [segue] [continua] Sia dunque $h > 2$ e consideriamo i vettori

$$\phi^2(w_1), \dots, \phi^2(w_{\alpha_h}), \phi(w_{\alpha_h+1}), \dots, \phi(w_{\alpha_{h-1}}) \qquad \text{in } H_{h-2}.$$

Questi sono ancora linearmente indipendenti, sempre perché $\phi_{|H_{h-1}}$ è iniettiva e appartengono a K_{h-2} che è un complementare di $H_h \oplus H_{h-1}$. Quindi uniti ai vettori precedenti formano un insieme di vettori indipendenti. Se $\dim_K H_{h-1} = \dim_K H_{h-2}$, abbiamo terminato questo passo e non ci sono blocchi di ordine esattamente $k-2$ nella matrice di Jordan di ϕ. Altrimenti, si ha

$$\alpha_{h-1} = \dim_K H_{h-1} < \dim_K H_{h-2} = \dim K_{h-2} - \dim K_{h-3} = \operatorname{rk} \phi^{h-3} - \operatorname{rk} \phi^{h-3} = \alpha_{h-2},$$

e quindi dobbiamo aggiungere dei vettori $w_{\alpha_{h-1}+1}, \dots, w_{\alpha_{h-2}}$ che completino i vettori dati a una base di H_{h-2}. Ognuno dei vettori aggiunti è un autovettore generalizzato di periodo $h-2$ e dà origine a un blocco di Jordan di ordine $h-2$. Se $h = 3$ abbiamo terminato. Altrimenti, proseguiamo analogamente, fino a esaurire i sottospazi nella decomposizione e ottenere una base di W che, opportunamente riordinata, dà la forma di Jordan alla matrice di ϕ e si conclude la dimostrazione del Teorema di Jordan. □

Osserviamo a margine che, dalla costruzione descritta sopra si ricava che

$$\dim_K H_j = \dim_K K_j - \dim_K K_{j-1} = \text{numero dei blocchi di ordine } \geq j$$

per $j = 1, \dots, h$. In particolare, il numero totale di blocchi coincide con $\dim_K H_1 = \dim_K \ker \phi$, ovvero coincide con la molteplicità geometrica dell'autovettore.

Esempio : Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$, di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

in base canonica.

(a) Si determinino polinomio caratteristico, e polinomio minimo per ϕ.

(b) Si determinino una matrice di Jordan, J, di ϕ ed una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ di $\mathbb{Q}^5$ tale che $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = J$, scrivendo la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{id})$.

Svolg.: (*a*) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = \det(X\mathbf{1}_5 - A) = (X-3)^5$ e si ha

$$A - 3\mathbf{1}_5 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A - 3\mathbf{1}_5)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e $(A - 3\mathbf{1}_5)^3 = \mathbf{0}$. Il polinomio minimo è quindi $(X-3)^3$.

[segue]

[continua] (*b*) La filtrazione dei nuclei è costituita dai sottospazi

$$\langle 0\rangle = K_0, \qquad K_1 = \ker(\phi - 3), \qquad K_2 = \ker(\phi - 3)^2, \qquad K_3 = \ker(\phi - 3)^3 = \mathbb{Q}^5;$$

con $\dim K_1 = 2$ e $\dim K_2 = 4$ (vedi le matrici sopra) e si ha

$$\dim H_3 = \dim K_3 - \dim K_2 = 1, \qquad \dim H_2 = \dim K_2 - \dim K_1 = 2, \qquad \dim H_1 = \dim K_1 = 2.$$

Dunque la matrice di Jordan di ϕ ha un blocco di ordine 3 e uno di ordine 2, e quindi è $J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

[continua] (*b*) La filtrazione dei nuclei è costituita dai sottospazi

$$\langle 0\rangle = K_0, \qquad K_1 = \ker(\phi-3), \qquad K_2 = \ker(\phi-3)^2, \qquad K_3 = \ker(\phi-3)^3 = \mathbb{Q}^5;$$

con $\dim K_1 = 2$ e $\dim K_2 = 4$ (vedi le matrici sopra) e si ha

$$\dim H_3 = \dim K_3 - \dim K_2 = 1, \qquad \dim H_2 = \dim K_2 - \dim K_1 = 2, \qquad \dim H_1 = \dim K_1 = 2.$$

Dunque la matrice di Jordan di ϕ ha un blocco di ordine 3 e uno di ordine 2, e quindi è $J = \begin{pmatrix} 3&1&0&0&0\\ 0&3&1&0&0\\ 0&0&3&0&0\\ 0&0&0&3&1\\ 0&0&0&0&3 \end{pmatrix}$.

Il vettore $e_2 \notin \ker(\phi-3)^2$ e quindi è autovettore generalizzato di periodo 3. Posto $H_3 = \langle e_2\rangle$, i vettori

$$v_3 = e_2, \qquad v_2 = (\phi-3)(e_2) = 2e_4, \qquad v_1 = (\phi-3)^2(e_2) = -2e_4 + 2e_5,$$

sono linearmente indipendenti e formano "una base del blocco di ordine 3".

[continua] (*b*) La filtrazione dei nuclei è costituita dai sottospazi

$$\langle 0 \rangle = K_0, \qquad K_1 = \ker\,(\phi - 3), \qquad K_2 = \ker\,(\phi - 3)^2, \qquad K_3 = \ker\,(\phi - 3)^3 = \mathbb{Q}^5;$$

con $\dim K_1 = 2$ e $\dim K_2 = 4$ (vedi le matrici sopra) e si ha

$$\dim H_3 = \dim K_3 - \dim K_2 = 1, \qquad \dim H_2 = \dim K_2 - \dim K_1 = 2, \qquad \dim H_1 = \dim K_1 = 2.$$

Dunque la matrice di Jordan di ϕ ha un blocco di ordine 3 e uno di ordine 2, e quindi è $J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Il vettore $e_2 \notin \ker\,(\phi - 3)^2$ e quindi è autovettore generalizzato di periodo 3. Posto $H_3 = \langle e_2 \rangle$, i vettori

$$v_3 = e_2, \qquad v_2 = (\phi - 3)(e_2) = 2e_4, \qquad v_1 = (\phi - 3)^2(e_2) = -2e_4 + 2e_5,$$

sono linearmente indipendenti e formano "una base del blocco di ordine 3".
Inoltre, il vettore $e_1 \in \ker\,(\phi - 3)^2$ e $K_2 = \langle e_1, (\phi - 3)(e_2) \rangle \oplus K_1 = \langle e_1, e_4 \rangle \oplus K_1$.
Possiamo porre $H_2 = \langle e_1, (\phi - 3)(e_2) \rangle$ e $H_1 = \left\langle (\phi - 3)e_1, (\phi - 3)^2(e_2) \right\rangle$; dunque i vettori

$$v_5 = e_1, \qquad v_4 = (\phi - 3)(e_1) = -2e_1 - 2e_2 + 2e_3,$$

completano i vettori precedenti a una base $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_5\}$, rispetto a cui ϕ ha matrice J. La matrice di cambiamento di base è

$$P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e si ha $J = P^{-1}AP = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ (. . . si verifichi l'identità equivalente $AP = PJ$). □

Esempio: Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ di dimensione 5, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una sua base, e si consideri l'endomorfismo $\phi : V \to V$, di matrice

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino polinomio caratteristico, e polinomio minimo per ϕ.

(b) Si determinino una matrice di Jordan, J, di ϕ ed una base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_5\}$ di $\mathbb{Q}^5$ tale che $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\phi) = J$, scrivendo la matrice $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathrm{id}_V)$.

Svolg.: (*a*) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = \det(X\mathbf{1}_5 - A) = (X+2)^3(X-3)^2$ e si ha

$$A-3\mathbf{1}_5 = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -5 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A+2\mathbf{1}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad (A+2\mathbf{1}_5)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -25 & 25 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 10 & 20 & 0 & 25 \\ -10 & 10 & 20 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

e $\mathrm{rk}(A - 3\mathbf{1}_5) = 4$, $\mathrm{rk}(A + 2\mathbf{1}_5) = 3$, $\mathrm{rk}(A + 2\mathbf{1}_5)^2 = 2$. Il polinomio minimo è quindi $(X+2)^2(X-3)^2$.

[segue]

[continua]
(b) L'autospazio generalizzato di autovalore 3 contiene un elemento di periodo 2 (l'autospazio ha dimensione 1). Dunque la matrice di Jordan di ϕ ha un blocco di ordine 2 relativo all'autovalore 3. Inoltre, vi sono due blocchi relativi all'autovalore -2 (la molteplicità geometrica), e almeno uno di questi ha dimensione 2 (l'indice dell'autovalore). Poiché l'autospazio generalizzato ha dimensione 3, non vi è altra possibilità che di un blocco di ordine 2 e uno di ordine 1. Dunque

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ricordando il polinomio minimo, $(X-3)^2(X+2)^2$, si ha che $\ker(\phi - 3\mathrm{id})^2 = \mathrm{im}\,(\phi + 2\mathrm{id})^2$ e quindi, $v_2 \in \mathrm{im}\,(\phi+2\mathrm{id})^2 \smallsetminus \ker(\phi - 3\mathrm{id})$ è un autovettore generalizzato di periodo 2 relativo all'autovalore 3, e possiamo porre

$$w_1 = (\phi - 3\mathrm{id})(v_2) = v_4 + v_5, \qquad w_2 = v_2.$$

Inoltre, $2v_2 - v_3 \in \ker(\phi + 2\mathrm{id})^2 \smallsetminus \ker(\phi + 2\mathrm{id})$ e $(\phi + 2\mathrm{id})(2v_2 - v_3) = v_4$ è un autovettore relativo all'autovalore -2 e non proporzionale a $v_1 + v_2$ (altro autovettore). Dunque, posto

$$w_3 = (\phi + 2\mathrm{id})(2v_2 - v_3) = v_4, \qquad w_4 = 2v_2 - v_3, \qquad w_5 = v_1 + v_2,$$

si ottiene una base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_5\}$ rispetto a cui ϕ ha matrice J. Si ha quindi

$$P = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathrm{id}_V) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e si verifica immediatamente che $P^{-1}AP = J$. $\square$

Esempio : Sia ϕ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione $n \geq 4$ su $\mathbb{C}$, tale che $\dim\ker(\phi^2 - \mathrm{id}_V)^2 = 3$ e $(\phi^2 - \mathrm{id}_V)^3 = 0_{\mathsf{End}_{\mathbb{C}} V}$.

(a) Si determinino tutte le matrici di Jordan (una per ogni classe di simiglianza) di endomorfismi soddisfacenti alle condizioni date. Per ogni tale matrice si indichino il polinomio caratteristico e il polinomio minimo dell'endomorfismo corrispondente.

(b) Per ogni endomorfismo ϕ determinato al punto precedente, si scriva la matrice di Jordan di $(\phi^2 - \mathrm{id}_V)^2$.

(c) Tra gli endomorfismi del punto (a) si dica quali ammettono un vettore ciclico.

Svolg.: (*a*) Consideriamo dapprima l'endomorfismo $\psi = \phi^2 - \mathrm{id}_V$. Si tratta di un endomorfismo nilpotente ($\psi^3 = 0 \neq \psi^2$) e quindi la filtrazione dei nuclei ha la forma $\langle 0 \rangle \subset K_1 \subset K_2 \subset K_3 = V$. Posto $k_i = \dim K_i$, si ha $k_2 - k_1 \geq k_3 - k_2$, e $k_1 = \dim\ker\psi \geq 1$, è il numero di blocchi di Jordan della matrice di ψ, $k_2 = 3$ e $k_3 = n = \dim V$.
Da $3 - k_1 \geq n - 3$, si deduce $n \leq 6 - k_1$, da cui si deduce che $n = 4$, perchè, da $n = 5$ si dedurrebbe $k_1 = 1$ e le ulteriori condizioni $k_2 = 3$, $k_3 = 5$, sono incompatibili con la presenza di un solo blocco di Jordan. Dunque $n = 4$ e $k_1 = 2$, $k_2 = 3$ e $k_3 = 4$ e quindi la matrice di Jordan di $\psi = \phi^2 - \mathrm{id}_V$ ha due blocchi relativi all'autovalore 0, uno di ordine 3 e l'altro di ordine 1. Ciò determina la matrice di Jordan di $\phi^2 = \psi + \mathrm{id}_V$ (l'identità, come ogni moltiplicazione per uno scalare, ha matrice di Jordan rispetto a qualunque base). [segue]

[continua]
Le possibili matrici di Jordan (non simili tra loro) per ϕ sono 4, ovvero

$$J_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad J_2=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\quad J_3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\quad J_4=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

In ciascuno dei casi, polinomio minimo e caratteristico sono:

$$\begin{array}{llll} p_{J_1}(X)=(X-1)^4 & p_{J_2}(X)=(X+1)^4 & p_{J_3}(X)=(X-1)(X+1)^3 & p_{J_4}(X)=(X+1)(X-1)^3 \\ \lambda_{J_1}(X)=(X-1)^3, & \lambda_{J_2}(X)=(X+1)^3, & \lambda_{J_3}(X)=(X-1)(X+1)^3, & \lambda_{J_4}(X)=(X+1)(X-1)^3. \end{array}$$

(*b*) Per ciascuno degli endomorfismi precedenti $\psi^2=(\phi^2-\mathrm{id}_V)^2$ è un endomorfismo nilpotente, di periodo 2 e con un nucleo di dimensione 3. Dunque una sua matrice di Jordan è $J=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

(*c*) Infine, possiamo osservare che solo per J_3 e J_4 il polinomio minimo coincide con il polinomio caratteristico; quindi solo in questi due casi esiste un vettore ciclico per ϕ. $\square$