Esercizi su Insiemi, Funzioni e Relazioni - Matematica Due - ottobre 2004

1. Quanti insiemi distinti si possono formare usando le operazioni di unione, intersezione e complementare a partire da 2 fissati insiemi A e B? Scriverli tutti. E a partire da 3 insiemi? E da 4?

2. Sviluppare le espressioni $(A\cup B)\cap(C\cup D)$ e $(A\cap B)\cup(C\cap D)$. Cosa succede se in particolare $B=D$?

3. Mostrare che l'insieme $\complement(A\times B)$ (si intenda: coppie non appartenenti ad $A\times B$) è unione disgiunta dei tre insiemi $(\complement A)\times B$, $(\complement A)\times(\complement B)$ e $A\times(\complement B)$.

4. Mostrare che l'insieme $(A\times A)\smallsetminus(B\times C)$ è unione dei due insiemi $(A\smallsetminus B)\times A$, $A\times(A\smallsetminus C)$, ed è unione disgiunta dei tre insiemi $(A\smallsetminus B)\times(A\cap C)$, $(A\cap B)\times(A\smallsetminus C)$ e $(A\smallsetminus B)\times(A\smallsetminus C)$. Trovare una descrizione simile per l'insieme $(A\times B)\smallsetminus(C\times D)$.

5. Scrivere esplicitamente gli elementi dei seguenti insiemi: $\mathscr{P}(\varnothing)$, $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing))$, $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing)))$, $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing))))$.

6. Mostrare che $A\subseteq B$ se e solo se $\mathscr{P}(A)\subseteq\mathscr{P}(B)$.

7. Determinare le relazioni tra gli insiemi seguenti:
(a) $\mathscr{P}(A\cup B)$ e $\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)$; (b) $\mathscr{P}(A\cap B)$ e $\mathscr{P}(A)\cap\mathscr{P}(B)$; (c) $\mathscr{P}(\complement A)$ e $\complement\mathscr{P}(A)$.

8. Esplorare le relazioni tra le operazioni di differenza insiemistica e di potenza: esprimere $\mathscr{P}(A\smallsetminus B)$ e $\mathscr{P}(A\vartriangle B)$.

9. Per un fissato insieme X si considerino le funzioni $\mathscr{P}(X)\to\mathscr{P}(X)$ seguenti:
(a) $u_B : A\mapsto A\cup B$ per un fissato $B\subseteq X$;
(b) $i_C : A\mapsto A\cap C$ per un fissato $C\subseteq X$;
(c) le composizioni $u_B\circ i_C$ e $i_C\circ u_B$;
(d) $A\mapsto X\smallsetminus A$;
per ognuna si dicano le proprietà di iniettività, suriettività ecc., se ne indichino eventualmente le inverse, si studi il loro rapporto con la relazione di inclusione e con le operazioni insiemistiche.

10. Determinare le relazioni tra i seguenti insiemi (di funzioni):
(a) $(A\cup B)^C$ e $A^C\cup B^C$; (b) $A^{(B\cup C)}$ e $A^B\times A^C$;
(c) $(A\cap B)^C$ e $A^C\cap B^C$; (d) $A^{(B\cap C)}$ e $A^B\cup A^C$;
(e) $(A\times B)^C$ e $A^C\times B^C$; (f) $A^{(B\times C)}$, $(A^C)^B$ e $(A^B)^C$.

11. Si determini se le funzioni $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ definite da $f_1(n)=n+3$ e $f_2(n)=n^2+1$ sono iniettive o suriettive ed eventualmente se ne trovino delle inverse destre o sinistre. Stesso problema considerandole come funzioni $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$.

12. Per le seguenti funzioni $f_i:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, si calcolino le due composizioni possibili e si verifichi se esse commutano tra loro oppure no; si studino inoltre le loro proprietà (iniettività, suriettività, ecc.): $f_1(n)=n+1$, $f_2(n)=2n$, $f_3(n)=n+3$, $f_4(n)=n^2$, $f_5(n)=n^2+n$.

Stesso problema, ma considerando le funzioni $f_i:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$. Che cosa cambia?

13. Per le funzioni dell'esercizio precedente, descrivere le funzioni immagine inversa e diretta.

14. Determinare proprietà e composizioni della funzione $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ che manda n in $n/2$ se n è pari, e in 0 altrimenti, e della funzione $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ che manda n in $2n$.

15. Dare un esempio di funzione $f:A\to B$ tale che esistano due insiemi $X,X'\subseteq A$ con $X\cap X'=\varnothing$ ma $f(X)\cap f(X')\neq\varnothing$.

16. Per una funzione $f:A\to B$, dimostrare che f è iniettiva (risp. suriettiva, biiettiva) se e solo se f_* lo è. Dimostrare inoltre che se f è iniettiva (risp. suriettiva, biiettiva) allora f^* è suriettiva (risp. iniettiva, biiettiva). Valgono i viceversa?

17. In generale, per una funzione $f:A\to B$ e per ogni $X\subseteq A$ si è visto che $f^*f_*(X)\supseteq X$; mostrare che f è iniettiva se e solo se vale l'uguaglianza per ogni $X\subseteq A$ (basta per qualche Y?).

Analogamente per ogni $Y\subseteq B$ si è visto che $f_*f^*(Y)\subseteq Y$; mostrare che f è suriettiva se e solo se vale l'uguaglianza per ogni $Y\subseteq B$ (basta per qualche X?).

18. Dare esempi per illustrare che in generale per una funzione $f:A\to B$ e per $X\subseteq A$ non vi sono rapporti tra $f(A\smallsetminus X)$ e $B\smallsetminus f(X)$.

19. Sia $f:A\to B$ una funzione; come si comportano le immagini dirette ed inverse in relazione alle operazioni di differenza insiemistica? Descrivere $f(X\smallsetminus X')$ e $f(X\vartriangle X')$ per $X,X'\subseteq A$, e $f^*(Y\smallsetminus Y')$ e $f^*(Y\vartriangle Y')$ per $Y,Y'\subseteq B$.

In particolare mostrare che f è iniettiva se e solo se $f(A \smallsetminus X) = f(A) \smallsetminus f(X)$ per ogni X, o anche se e solo se e $f(A \vartriangle X) = f(A) \vartriangle f(X)$ per ogni X.

20. Per una funzione qualsiasi $f : A \to B$, caratterizzare gli insiemi $X \subseteq A$ tali che $f^* f_*(X) = X$ e gli insiemi $Y \subseteq B$ tali che $f_* f^*(Y) = Y$. È vero che f^* e f_* sono una inversa dell'altra se ristrette a questi sottinsiemi di $\mathscr{P}(A)$ e $\mathscr{P}(B)$?

21. Si considerino le tre applicazioni seguenti: $p_1 : A \times A \to A$ che manda (a_1, a_2) in a_1 (prima proiezione), $p_2 : A \times A \to A$ che manda (a_1, a_2) in a_2 (seconda proiezione), $d : A \to A \times A$ che manda a in (a, a) (diagonale). Si verifichino le eventuali proprietà di iniettività e suriettività; si calcolino tutte le possibili combinazioni e si dica quali proprietà è possibile dedurre da esse.

22. Proprietà delle applicazioni $p_A : A \times B \to A$ e $p_B : A \times B \to B$ che mandano (a, b) in a e b rispettivamente: per ogni insieme C e per ogni coppia di funzioni $\alpha : C \to A$ e $\beta : C \to B$ esiste una unica funzione $f : C \to A \times B$ tale che $p_A \circ f = \alpha$ e $p_B \circ f = \beta$. Questo stabilisce una biiezione canonica tra $A^C \times B^C$ e $(A \times B)^C$.

23. Dati due insiemi A e B, definiamo unione disgiunta e indichiamo con $A \sqcup B$ l'insieme $(A \times \{1\}) \cup (B \times \{2\})$. Si verifichi che c'è una biiezione canonica tra $A \sqcup B$ e $B \sqcup A$.

Le due funzioni $i_A : A \to A \sqcup B$ e $i_B : B \to A \sqcup B$ che mandano a in $(a, 1)$ e b in $(b, 2)$ rispettivamente, godono della seguente proprietà: per ogni insieme C e per ogni coppia di funzioni $\alpha : A \to C$ e $\beta : B \to C$ esiste una unica funzione $f : A \sqcup B \to C$ tale che $f \circ i_A = \alpha$ e $f \circ i_B = \beta$. Questo stabilisce una biiezione canonica tra $C^A \times C^B$ e $C^{A \sqcup B}$.

Si mostri che esiste una funzione canonica $A \sqcup B \to A \cup B$, che è sempre suriettiva ed è iniettiva se e solo se $A \cap B = \varnothing$.

24. Sia $R \subseteq A \times B$ una relazione tra A e B; mostrare che essa è grafico di una funzione di A in B se e solo se la funzione $p_A : R \to A$ che manda (a, b) in a è biiettiva. Quando R è grafico di una funzione di B in A?

25. Studiare la stabilità delle proprietà di una relazione (essere grafico, essere simmetrica, riflessiva, transitiva, antisimmetrica, ecc.) passando alla relazione trasposta.

26. Nel piano della geometria euclidea elementare, si consideri sull'insieme delle rette la relazione di parallelismo. Mostrare che si tratta di una relazione di equivalenza (se ogni retta viene considerata parallela a se stessa!) e se ne descrivano le classi di equivalenza.

27. Nel piano della geometria euclidea elementare, si consideri sull'insieme delle rette la relazione di incidenza (due rette sono in relazione se e solo se si intersecano). Di che proprietà gode questa relazione? Si studi la relazione di equivalenza generata e se ne descrivano le classi di equivalenza.

28. Nello spazio della geometria euclidea elementare, si consideri sull'insieme delle rette (risp. dei piani) la relazione di parallelismo (essere parallele per due rette significa stare su uno stesso piano e lì essere parallele). Mostrare che si tratta di una relazione di equivalenza (se ogni retta, risp. piano, viene considerata parallela a se stessa) e se ne descrivano le classi di equivalenza.

29. Nello spazio della geometria euclidea elementare, si consideri sull'insieme delle rette (risp. dei piani) la relazione di incidenza (due rette, risp. piani, sono in relazione se e solo se si intersecano). Di che proprietà gode questa relazione? Si studi la relazione di equivalenza generata e se ne descrivano le classi di equivalenza.

30. Nell'insieme $\mathbb{Z}$ definiamo che $a \sim b$ se e solo se $a - b$ è un numero pari (divisibile per 2). Si tratta di una relazione di equivalenza? Eventualmente quali sono le classi di equivalenza?

31. Nell'insieme $\mathbb{Z}$ definiamo che $a \sim b$ se e solo se $a - b$ è un numero dispari (non divisibile per 2). Si tratta di una relazione di equivalenza? Eventualmente qual'è la relazione di equivalenza generata, e quali sono le sue classi di equivalenza?

32. Nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali definiamo la relazione $n|m$ (letto "n divide m") se m è un multiplo di n, ovvero se $m = pn$ per qualche $p \in \mathbb{N}$. Si tratta di una relazione d'ordine? È totale? Vi sono elementi primo e ultimo? Come sono fatti i sottinsiemi totalmente ordinati per la divisibilità?

33. Nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi definiamo la relazione $n|m$ (letto "n divide m") se m è un multiplo di n, ovvero se $m = pn$ per qualche $p \in \mathbb{Z}$. Mostrare che si tratta di una relazione riflessiva e transitiva. Si tratta di una relazione d'ordine? Considerare l'equivalenza $n \sim m$ se e solo se $n|m$ e $m|n$; descrivere l'insieme $\mathbb{Z}/\sim$ e l'ordine indotto dalla divisibilità.

34. Dire quali delle seguenti funzioni $f_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sono ordinate, sia per l'ordine $\leqslant$, sia per l'ordine di divisibilità $|$: $f_1(n) = n + 1$, $f_2(n) = 2n$, $f_3(n) = n + 3$, $f_4(n) = n^2$, $f_5(n) = n^2 + n$.

Esercizi su Cardinali, Naturali, Combinatorica - Matematica Due - ottobre 2004

1. Dati tre cardinali α, β e γ, mostrare che
(a) $(\alpha\beta)^\gamma = \alpha^\gamma\beta^\gamma$;
(b) $\alpha^{\beta\gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma = (\alpha^\gamma)^\beta$;
(c) se $\alpha \leqslant \beta$ allora $\alpha+\gamma \leqslant \beta+\gamma$, $\alpha\gamma \leqslant \beta\gamma$, $\alpha^\gamma \leqslant \beta^\gamma$, $\gamma^\alpha \leqslant \gamma^\beta$.

2. Per ogni due insiemi finiti A e B, mostrare che $|A \smallsetminus B| + |A \cap B| = |A|$, e che se $B \subseteq A$ allora $|A \smallsetminus B| = |A| - |B|$. E per insiemi infiniti?

3. Siano A e B due insiemi. È vero o falso che $|A| + |B| = |A|$ implica $|B| = 0$? È vero o falso che $|A| \cdot |B| = |A|$ implica $|B| = 1$? Dare esempi e controesempi.

4. Mostrare le seguenti relazioni:
(a) $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$;
(b) $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$;
(c) $|\mathbb{R}| = |[0,1]| = |(0,1)|$ (con le notazioni usuali: $[0,1]$ e $(0,1)$ sono gli intervalli dei numeri reali compresi tra 0 e 1, inclusi gli estremi o esclusi gli estremi);
(d) $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$;

5. Si confrontino le cardinalità dei seguenti insiemi:
(a) $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, insieme delle funzioni di $\mathbb{N}$ in sé;
(a') l'insieme delle funzioni di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$;
(b) insieme delle funzioni (strettamente) crescenti di $\mathbb{N}$ in sé
(c) insieme delle funzioni decrescenti di $\mathbb{N}$ in sé
(d) insieme delle funzioni di $\mathbb{N}$ in sé che siano "quasi sempre nulle", cioè che hanno valori diversi da zero solo per un numero finito di elementi;
(e) insieme delle funzioni di $\mathbb{N}$ in sé che siano addittive (cioè le funzioni f tali che $f(n+n') = f(n) + f(n')$ per ogni $n, n' \in \mathbb{N}$);
(f) insieme delle funzioni di $\mathbb{N}$ in sé che siano moltiplicative (cioè le funzioni f tali che $f(nn') = f(n)f(n')$ per ogni $n, n' \in \mathbb{N}$).

6. Verificare la formula di inclusione-esclusione per 3, 4, n insiemi (induzione).

7. Dimostrare le formule seguenti riguardo ai coefficienti binomiali:
(a) $\binom{n}{k} = \sum_{i=1}^n \binom{n-i}{k-1}$
(b) $\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^n \binom{n-i}{k-i+1}$
(c) $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$
(d) $\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} = 0$
(e) $\sum_{i=0}^p \binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i} = 2^n \binom{n}{p}$
Se possibile, se ne dìa una interpretazione combinatorica.

8. Studiare la funzione ricorsivamente definita da $s(1) = 1$ e $s(n+1) = s(n) + (-1)^n n$.

9. Studiare la funzione ricorsivamente definita da $f(n,k) = f(n-1,k)f(n-1,k-1)$ e $f(n,0) = s$, $f(n,n) = s$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

10. Studiare gli sviluppi del trinomio $(x+y+z)^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, analogamente a quanto fatto per il binomio; in particolare definire dei coefficienti trinomiali e discutere le loro relazioni ricorsive.

11. Calcolare la somma dei primi n numeri naturali dispari e la somma dei primi n numeri naturali pari per ogni n. Dare una dimostrazione per induzione del proprio risultato.

12. Determinare, e dimostrare per induzione la correttezza del proprio risultato, le somme
(a) $\sum_{i=1}^n (-1)^i i$ per ogni n naturale.
(b) $\sum_{i=1}^n (-1)^i i^2$ per ogni n naturale.
(c) $\sum_{i=1}^n 2^i$ per ogni n naturale.
(d) $\sum_{i=1}^n (-1)^i 2^i$ per ogni n naturale.

13. Disuguaglianze di Bernoulli.
(a) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x > -1$ si ha $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ (e vale l'uguaglianza se e solo se $x = 0$ oppure $n \in \{0,1\}$;
(b) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e ogni $x \in \mathbb{R}$ con $\frac{1}{n} > x > -1$ si ha $\frac{1}{1-nx} \geqslant (1+x)^n$.

14. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo

$$(1+a_1)\cdots(1+a_n) \geqslant 1 + a_1 + \cdots + a_n$$

se $a_i \in \mathbb{R}$ hanno tutti lo stesso segno e sono tutti maggiori di -1.

15. Confronto delle Medie Aritmetica e Geometrica. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ positivo e ogni famiglia $a_1, \dots a_n$ di reali positivi, la media aritmetica è $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$, mentre la media geometrica è $g = (\prod_{i=1}^{n} a_i)^{1/n}$. Mostrare che $m \geqslant g$ (e vale l'uguaglianza se e solo se tutti gli a_i sono uguali). Conviene dimostrare che

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^n$$

procedendo per induzione, e ragionando nel passo induttivo nel modo seguente: se uno degli a_i, diciamo l'ultimo, coincide con la media aritmetica, allora ci si riconduce subito all'ipotesi induttiva; altrimenti vi saranno un a_i, diciamo l'ultimo, che è superiore alla media aritmetica (sia $a_{n+1} = M + c$ con c positivo), e un altro a_i, diciamo il penultimo, che è inferiore alla media aritmetica (sia $a_n = M - d$ con d positivo): si sostituisca a_{n+1} con M, e a_n con $M + c - d$...

16. Per un poligono piano, si dicono diagonali i segmenti che uniscono due vertici non adiacenti; quante diagonali ha un poligono con n vertici?

17. Dati n punti nel piano, a tre a tre non allineati, quanti triangoli distinti è possibile formare? E se fossero punti nello spazio?

18. Quante parole con meno di 5 caratteri si possono formare con alfabeti di due lettere, di tre lettere, di quattro lettere, di cinque lettere, e in generale di n lettere?

Quante di queste parole non hanno lettere consecutive uguali?

19. In quanti modi si possono distribuire 18 palline uguali in 5 cassetti diversi? E facendo in modo che nessun cassetto rimanga vuoto? E facendo in modo che due siano vuoti? E facendo in modo che due fissati siano vuoti?

20. In quanti modi si possono distribuire 5 palline uguali in 18 cassetti diversi? E facendo in modo che ogni cassetto abbia al più una pallina?

21. Nove persone cenano seduti ad un tavolo circolare; in quanti modi diversi si possono disporre? E se fossero su una panchina? Se ci fossero 3 coppie di gemelli identici, quante disposizioni potrebbe distinguere un osservatore?

22. Quanti sono i numeri di n cifre (nella notazione decimale) divisibili per cinque?

23. Quanti sono i numeri di n cifre (nella notazione decimale), ognuna non nulla, tale che ogni cifra sia non minore della seguente?

24. Quanti sono i numeri di 9 cifre (nella notazione decimale) contenenti tre volte la cifra 1, due volte ciascuna le cifre 3, 5, 7?

25. Quanti sono i numeri dispari di tre cifre distinte (nella notazione decimale)? E di quattro? E di n?

$*$**26.** Lemma dei matrimoni. Dati due insiemi M e F, e una funzione $p : M \to \mathscr{P}(F)$, esiste una applicazione iniettiva $f : M \to F$ tale che $f(m) \in p(m)$ per ogni $m \in M$ se e solo se per ogni $H \subseteq M$ si ha $|\bigcup_{m \in H} p(m)| \geqslant |H|$.

Esercizi su Interi, Divisione, MCD - Matematica Due - ottobre 2004

1. Mostrare che $\sum_{i=1}^{n} i\, i! = (n+1)! - 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

2. Mostrare che $\sum_{k=1}^{n}(1+a^k) = n + a\dfrac{a^n-1}{a-1}$ per ogni $n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$ e per ogni $a \in \mathbb{R} \smallsetminus \{1\}$.

3. Eseguire le divisioni con resto tra le seguenti coppie di interi:
(a) 1965 e 23;
(b) 1985 e 29;
(c) 2004 e 109.

4. Calcolare il MCD tra le seguenti coppie di interi, e i coefficienti della loro combinazione che lo calcolano:
(a) 300 e 325;
(b) 198 e 288;
(c) 576 e 840.
(d) 630 e 132;
(e) 285 e 126.

5. Se $a = qb + r$ è la divisione con resto di a per b con a, b positivi, scrivere quoziente e resto delle divisioni di a per $-b$, di $-a$ per b e di $-a$ per $-b$.

6. Mostrare che $MCD(ac, bc) = cMCD(a, b)$.

7. Mostrare che $MCD(a, b + za) = MCD(a, b)$ se $z \in \mathbb{Z}$. Usare questo risultato per giustificare l'algoritmo di Euclide di calcolo del massimo comun divisore.

8. Mostrare che $MCD(a, bc)$ divide, e in generale non coincide, con il prodotto $MCD(a, b)MCD(a, c)$. Mostrare che $MCD(a, bc) = MCD(a, b)MCD(a, c)$ se $MCD(b, c) = 1$ (cioè se b e c sono coprimi).

9. Siano $a = qb + r$ e $a' = q'b + r'$ le divisioni con resto di a e a' per b. Cosa possiamo dire delle divisioni con resto di aa', $a + a'$, $a - a'$ per b?

10. Siano $a = qb + r$ e $b = q'c + r$ le divisioni con resto di a per b e di b per c. Cosa possiamo dire della divisione con resto di a per c?

11. Date le due divisioni con resto $a = qb + r$ di a per b e $b = q'a + r'$ di b per a, che relazioni vi sono tra q, q', r, r'?

12. Scrivere le tavole di somma e moltiplicazione di $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ per $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Trovare i divisori di zero, i nilpotenti, gli unipotenti, gli invertibili.
È vero che in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ un elemento è o invertibile o divisore di zero?

13. Studiare iniettività e suriettività della funzione che manda x in x^2 come funzione di $\mathbb{Z}$ in sé e come funzione di $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ in sé per $n = 2, 3, 4, 5, 6$.

14. Idem per la funzione che manda x in x^3.

15. Dati $a, b \in \mathbb{N}$, si studi la funzione $f_{(a,b)} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita da $f_{(a,b)}(x, y) = ax + by$.

16. Rappresentazione posizionale in base qualsiasi. Sia b un qualunque numero intero maggiore di 1. Dato un numero intero, esso si può rappresentare come sequenza di cifre comprese tra 0 e $b - 1$ nel modo seguente: la sequenza $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ rappresenta il numero $a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$ (se $b = 10$, allora si tratta della rappresentazione posizionale in base 10). Dato un numero naturale, come trovare la sua rappresentazione posizionale in base b? [Scrivere un algoritmo, usando ripetutamente la divisione euclidea con resto, per trovare successivamente le cifre a_0, a_1, ..., a_n].
Di solito per indicare che una sequenza $a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$ di cifre rappresenta un numero in base b, si scrive la base al pedice del numero: $(a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_b$

17. Come mai noi usiamo la base 10? Che base userebbero le scimmie? E i cartoni animati?

18. Scrivere nelle basi 2, 3, 4, 8, 16 i seguenti numeri scritti in base 10: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 256, 3, 9, 27, 81, 243 (per le basi $b > 10$ si usano come cifre successive a 9 le lettere maiuscole dell'alfabeto nell'ordine alfabetico; per esempio in base 16 le cifre sono $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$).

19. Esprimere in base 10 i seguenti numeri naturali espressi nella base indicata a pedice: 101010_2, 100_8, 101_8, 115_8, 100_{16}, 101_{16}, $11A_{16}$, $A1A_{16}$, $A2C_{16}$, FAC_{16}.

20. Dare dei criteri per decidere se un numero intero scritto in base 10 è divisibile per 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13.

21. Ricordare la "regola del 9" per il controllo delle moltiplicazioni (e delle somme), e giustificarla in termini di congruenza modulo 9.

22. Sia p un fissato numero primo. Per ogni numero intero non nullo n, definiamo l'ordine in p nel modo seguente: $ord_p(n) = a$ se p^a divide n, e p^{a+1} non divide n (dunque è il massimo esponente a tale che p^a divide n). Abbiamo allora una funzione $ord_p : \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{N}$; mostrare che soddisfa alle seguenti proprietà:
(a) $ord_p(n) = 0$ se e solo se p non divide n;
(b) $ord_p(nm) = ord_p(n) + ord_p(m)$ (moltiplicatività);
(c) $ord_p(n + m) \geqslant \min(ord_p(n), ord_p(m))$ (quando vale l'uguaglianza? quando la disuguaglianza stretta?);
(d) se m divide n allora $ord_p(m) \leqslant ord_p(n)$ (vale il viceversa?).
ord_p è funzione suriettiva? iniettiva?

23. Calcolare ord_3 e ord_5 dei seguenti interi: 15, 16, 27, 69, 125, 330.

24. Sia p un fissato numero primo. Per un intero positivo n, calcolare $ord_p(p^n)$, $ord_p(p!)$,$ord_p(p^n!)$, $ord_p(n!)$ [usare le cifre in base p], $ord_p(\binom{p}{n})$.

25. Mostrare che per ogni coppia di numeri interi x e y abbiamo che $(x + y)^p \equiv x^p + y^p \pmod p$ (si osservi che i coefficienti binomiali $\binom{p}{i}$ sono divisibili per p se p è primo e $i \neq 0, p$).

Dedurne per induzione il piccolo teorema di Fermat: per ogni intero a, abbiamo che $a^p \equiv a \pmod p$.

26. In una scatola ci sono scorpioni, ragni e centopiedi; in totale si contano 282 zampe. Dire se è possibile, ed eventualmente determinare quale può essere il contenuto della scatola.

27. Dire se esistono, ed eventualmente trovarli, interi x, y, z tali che $6x + 28y + 15z = 1$.

28. Risolvere la congruenza $16x \equiv 1000 \pmod{27}$.

29. Discutere il seguente sistema di congruenze: $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 7 \\ x \equiv 3 \pmod 6 \end{cases}$

30. Discutere il seguente sistema di congruenze: $\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{28} \\ 10x \equiv 35 \pmod{125} \end{cases}$

31. Disponendo di francobolli da 36 e da 45 centesimi, è possibile affrancare un pacco per 2 euro e 34 centesimi? Eventualmente come approssimarlo con la perdita minore? E per un pacco di 3 euro e 51 centesimi?

Esercizi sui Numeri Complessi - Matematica Due - Novembre 2004

1. Calcolare z^{-1}, w^{-1}, zw, zw^{-1}, $z^{-1}w$, z^2, z^3, z^4, le radici quadrate di z e le radici cubiche di z per le seguenti coppie:
(a) $z = 1 + i$, $w = 2 - i$;
(b) $z = 1 - i$, $w = 1 + 2i$;
(c) $z = 2e^{i\pi/3}$, $w = 3e^{i\pi/4}$
(d) $z = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$, $w = i$
(e) $z = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$, $w = \pm i$

2. Si studino le proprietà di iniettività, suriettività, eventuali inverse destre e sinistre per le seguenti funzioni $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$:
(1) $f_1(z) = z^2 + i$;
(2) $f_2(z) = (z + i)^2$;
(3) $f_3(z) = z - \overline{z}$;
(4) $f_4(z) = z/|z|$ se $z \neq 0$, $f_4(0) = 0$.
(5) $f_5(z) = z/\overline{z}$ se $z \neq 0$, $f_5(0) = 0$.
Per ogni $w \in \mathbb{C}$, si determini la sua controimmagine per ciascuna delle funzioni date.

3. Si consideri l'insieme $\{z^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ per un fissato $z \in \mathbb{C}$; trovare condizioni necessarie e sufficienti affinché:
(a) l'insieme sia finito;
(b) l'insieme ammetta una infinità di elementi tra loro allineati;
(c) l'insieme sia tutto contenuto nel cerchio unitario;
(d) l'insieme sia tutto esterno al cerchio unitario.

4. Come l'esercizio precedente per l'insieme delle radici n-esime di z al variare di n.

5. Definiamo $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ (circolo unitario o circonferenza unitaria) e $R(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1$ per qualche $n \in \mathbb{N}\}$ (radici dell'unità). Mostrare che $R(1) \subseteq \mathbb{S}^1$ e che l'inclusione è stretta. Come si caratterizzano gli elementi di $R(1)$ in termini dell'argomento? Determinare le cardinalità di $R(1)$ e di $\mathbb{S}^1$.

6. È vero che tra due punti di $\mathbb{S}^1$ si trova sempre qualche punto di $R(1)$ (nel senso della geometria di $\mathbb{S}^1$ nel piano di Gauss)?

7. Scrivere (e disegnare sul piano di Gauss) le radici n-esime di $-i$, $1+i$, $1-i$ per $n = 2, 3, 4, 5, 6$.

8. Determinare $\cos(5t)$, $\cos(8t)$, $\sin(6t)$, $\sin(9t)$ in termini delle funzioni trigonometriche di argomento t (e loro potenze).

9. Calcolare $\sin^3 t$, $\sin^4 t$, $\cos^5 t$, $\cos^6 t$ in termini delle funzioni trigonometriche di argomento t (e multipli di t).

10. Dimostrare le formule sul parallelogramma per i numeri complessi, e spiegarne l'interpretazione geometrica.

11. Dare l'interpretazione geometrica nel piano di Gauss della inversione dei numeri complessi: se $z = \varrho e^{i\vartheta}$ allora $z^{-1} = \varrho^{-1}e^{-i\vartheta}$.

12. Dare l'interpretazione geometrica nel piano di Gauss del passaggio all'opposto dei numeri complessi: se $z = \varrho e^{i\vartheta}$ allora $-z = \varrho e^{(i\vartheta+\pi)}$.

13. Dare rappresentazioni grafiche nel piano di Gauss per la differenza e la divisione tra numeri complessi.

14. Rappresentare nel piano di Gauss tutti i logaritmi complessi di e e di ie. Per un qualsiasi $z = \varrho e^{i\vartheta}$ disegnare nel piano di Gauss la famiglia dei suoi logaritmi.

15. Se $|z| = 1$, è vero che le radici n esime di z si ottengono ruotando opportunamente (e di quanto?) le radici n-esime dell'unità?

16. Calcolare le lunghezze dei lati dei poligoni regolari di n lati inscritti nella circonferenza unitaria.

17. Mostrare che la funzione $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ che manda (ξ, ϱ) nel prodotto $\xi\varrho$ è una biiezione. Scrivere la funzione inversa.

18. Il semipiano di Poincaré è definito da $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ (numeri complessi la cui parte immaginaria è positiva). Il disco unità è $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ (numeri complessi di modulo strettamente inferiore a 1). Mostrare che la funzione $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ è una biiezione $P \to D$.

Determinare l'immagine della semicirconferenza di centro origine e raggio 1; e della semiretta verticale passante per l'origine.

Mostrare che i tratti di circonferenze di centro il punto $-i$ sono mandati in tratti di circonferenze di centro il punto 1.

19. Siano a, b, c, d numeri reali tali che $ad - bc = 1$. Consideriamo la funzione (detta trasformazione lineare fratta) $s : P \to P$ (P è il semipiano di Poincaré) data da $s(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

Mostrare che $\Im(s(z)) = \frac{\Im(z)}{|cz+d|^2}$, cosicché in effetti s è definita da P a P.

Mostrare che s può essere scritta come composizione di funzione dei seguenti tre tipi: traslazione reale ($z \mapsto z + u$ con $u \in \mathbb{R}$), omotetie reali ($z \mapsto vz$ con $v \in \mathbb{R}$, $v > 0$), controinversioni ($z \mapsto -\frac{1}{z}$).

Descrivere le figure formate da $s(z)$ se z descrive le semicirconferenze con centro sull'asse reale, oppure le semirette ortogonali all'asse reale.

Esercizi su Spazi Vettoriali - Matematica Due - novembre 2004

1. Nel piano $\mathbb{R}^2$ consideriamo i vettori $v = \binom{1}{2}$ e $w = \binom{-1}{1}$.

(a) mostrare che ogni vettore $x = \binom{x_1}{x_2}$ del piano si scrive in modo unico come combinazione lineare $x = \alpha v + \beta w$ (determinare α e β in funzione di x_1 ed x_2);

(b) disegnare e caratterizzare (tramite equazioni o disequazioni) i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ formati dagli estremi finali dei vettori del tipo $\alpha v + \beta w$ ove α e β sono numeri reali soggetti alle seguenti condizioni:
(C) $\alpha, \beta \in [0, \infty)$
(R) $\alpha + \beta = 1$
(S) $\alpha + \beta = 1$ con $\alpha, \beta \in [0, 1]$
(P) $\alpha, \beta \in [0, 1]$
(T) $\alpha + \beta \leqslant 1$ con $\alpha, \beta \in [0, 1]$
(X) $\alpha + \beta \leqslant 1$.

(c) specificare le relazioni di inclusione tra gli insiemi precedenti.

2. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ consideriamo i vettori $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) mostrare che un vettore $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ appartiene al piano generato da v e w se e solo se vale la relazione $4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$;

(b) descrivere i sottoinsiemi analoghi a quelli dell'esercizio precedente.

3. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ consideriamo i vettori $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) verificare che sono linearmente indipendenti e risolvere in α, β, γ la relazione $x = \alpha u + \beta v + \gamma w$ per un vettore $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ generico;

(b) disegnare e caratterizzare (tramite equazioni o disequazioni) i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ formati dagli estremi finali dei vettori del tipo $\alpha u + \beta v + \gamma w$ ove α, β e γ sono numeri reali soggetti alle seguenti condizioni:
(C) $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \infty)$
(Pi) $\alpha + \beta + \gamma = 1$
(Tr) $\alpha + \beta + \gamma = 1$ con $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$
(Pa) $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$
(Te) $\alpha + \beta + \gamma \leqslant 1$ con $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$
(X) $\alpha + \beta + \gamma \leqslant 1$.

(c) specificare le relazioni di inclusione tra gli insiemi precedenti.

4. Verificare che l'insieme dei vettori $u = \binom{1}{2}$, $v = \binom{1}{-1}$, $w = \binom{0}{-1}$ e $z = \binom{-2}{2}$ di $\mathbb{R}^2$ è generatore, ed estrarne tutte le basi possibili di $\mathbb{R}^2$.

5. Verificare che l'insieme dei vettori $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, e $z = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$ è generatore, ed estrarne tutte le basi possibili di $\mathbb{R}^3$.

6. Descrivere tramite equazioni il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (sono linearmente indipendenti?), e poi completare quest'insieme ad una base di $\mathbb{R}^4$.

7. Verificare che i sottinsiemi di $\mathbb{R}^4$ formati dai vettori $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ soddisfacenti alle condizioni $x_1 - x_4 = 0 = x_1 + x_2$ (sia U) e $x_3 - x_4 = 0 = x_2 + x_3$ (sia V) sono sottospazi vettoriali, trovarne la dimensione evidenziando delle basi; calcolare poi l'intersezione trovandone una base. Trovare le equazioni del più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ contenente sia U che V.

8. Siano v e w due vettori non nulli di uno spazio vettoriale V. Sotto quali condizioni i vettori v e $\alpha v + \beta w$ sono linearmente indipendenti?

9. Consideriamo lo spazio vettoriale reale delle applicazioni continue di $\mathbb{R}$ in sè.

(a) vero che l'insieme formato dalle tre funzioni 1 (funzione costante), $\sin^2$ e $\cos^2$ è linearmente dipendente?

(b) si consideri l'insieme $\{\sin(nx) : n \in \mathbb{N},\ n \neq 0\} \cup \{\cos(nx) : n \in \mathbb{N}\}$ e si dimostri che è un insieme linearmente indipendente;

(c) cosa dire dell'insieme $\{\sin(\alpha + nx) : n \in \mathbb{N},\ n \neq 0,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$?

10. Sia $V = K[X]_{\leqslant 4}$ lo spazio vettoriale su K dei polinomi di grado minore o uguale a 4.
(a) qual è la dimensione di V su K?
(b) esistono basi di V i cui elementi siano polinomi di grado 4?
(c) esistono basi di V i cui elementi siano polinomi di grado minore o uguale a 3?
(d) esistono basi di V i cui elementi siano polinomi privi di termine noto?

11. Si determini se i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ formati dai vettori $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$ soddisfacenti alle condizioni seguenti siano o meno sottospazi di $\mathbb{R}^3$:
(a) $x_1^2 + x_2^2 = x_3$
(b) $|x_1| = |x_2|$
(c) $x_1 + x_2 = x_3$
(d) $x_1x_2 + x_2x_3 = 0$
(e) $x_1 + x_2 - x_3 + 1 = 0$
(f) $x_1 - x_2^2 = 0$ e $x_1 = 0$
(g) $x_1 - x_2x_3 = 0$ e $x_1 = 0$
In ciascuno dei casi, cercare di disegnare l'insieme in questione.

12. Calcolare somma, intersezione (evidenziando basi e dimensioni) per i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:
(a) $V = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ e $W = \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle$.
(b) $V = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ e $W = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$.

13. Sia $V = K[X]_{\leqslant 4}$ lo spazio vettoriale su K dei polinomi di grado minore o uguale a 4. Consideriamo i seguenti sottinsiemi:

$$V_s = \{f \in V : f(X) = f(-X)\} \qquad \text{e} \qquad V_a = \{f \in V : f(X) = -f(-X)\} .$$

(a) mostrare che V_s e V_a sono sottospazi, trovarne delle basi e le dimensioni;
(b) è vero che $V = V_s \oplus V_a$?
(c) generalizzare sostituendo 4 con n generico.

14. Come l'esercizio precedente usando i sottoinsiemi $U = \{f \in V : f(X) = f(1 - X)\}$ e $W = \{f \in V : f(X) = -f(1 - X)\}$.

15. Qual è la minima dimensione di uno spazio vettoriale V tale che due suoi sottospazi di dimensione m_1 ed m_2 si intersecano solo nel vettore nullo? Dare degli esempi per $m_1, m_2 = 1, 2, 3, 4$.

16. Qual è la massima dimensione di uno spazio vettoriale V tale che due suoi sottospazi di dimensione m_1 ed m_2 hanno intersezione sempre non banale? Dare degli esempi per $m_1, m_2 = 1, 2, 3, 4$.

17. Due sottospazi vettoriali U e W di V sono complementari, cioè $V = U \oplus W$; sia v un vettore non appartenente a $U \cup W$ (cioè non appartenente né a U né a W). Calcolare la dimensione dei sottospazi $U + \langle v \rangle$, $W + \langle v \rangle$ e della loro intersezione.

18. Sia $Q(X) = c(X - \alpha_1)^{m_1} \cdots (X - \alpha_r)^{m_r}$ un polinomio di grado $n = \sum_{i=1}^{r} m_i$ in $V = K[X]$ e consideriamo l'insieme

$$V_Q = \left\{ \frac{P(X)}{Q(X)} : P(X) \in V \text{ con } \deg P(X) < n \right\}$$

(a) mostrare che V_Q è spazio vettoriale su K di dimensione n;
(b) mostrare che l'insieme $\{\frac{1}{(X-\alpha_i)^{j_i}} : j_i = 1, \ldots, m_i \text{ e } i = 1, \ldots, r\}$ è una base di V_Q su K.

19. Siano u, v, w e z quattro vettori in $\mathbb{R}^n$ tali che i loro estremi siano i quattro punti consecutivi di un parallelogramma.
(a) interpretare la condizione data in termini dei vettori;
(b) mostrare che $(v - u) - (w - u) + (z - u) = 0$;
(c) verificare che $u + \frac{1}{2}(w - u) = v + \frac{1}{2}(z - v)$ e dare l'interpretazione geometrica dell'uguaglianza.

20. Si consideri l'insieme $\mathbb{R}_{>0}$ dei numeri reali strettamente positivi, dotato delle seguenti operazioni: la "somma" di due numeri sia il loro prodotto, il prodotto scalare del reale $\alpha \in \mathbb{R}$ per l'elemento $r \in \mathbb{R}_{>0}$ sia r^α. Dimostrare che $\mathbb{R}_{>0}$ con queste operazioni è uno spazio vettoriale reale il cui vettore nullo è 1. Qual'è la sua dimensione?

Esercizi su Applicazioni Lineari - Matematica Due - novembre 2004

1. Si consideri l'applicazione f di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^4$ definita da $f(s,t) = (2s+t, s-t, s+t, s+2t)$.
(a) Si mostri che f è lineare;
(b) si determini $\ker(f)$;
(c) si trovi una base di $\mathrm{im}\,(f)$.

2. Si consideri l'omomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$ definito da $f(r,s,t) = (r+s+t, 2r-s)$.
(a) Si mostri che f è suriettivo;
(b) si determini $\ker(f)$;
(c) trovare $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $f^{-1}((1,2)) = v + \ker(f)$;
(d) mostrare che per ogni $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, esiste $v \in \mathbb{R}^3$, tale che $f^{-1}((a,b)) = v + \ker(f)$.

3. Considerare l'operazione di derivazione $D = \frac{d}{dX}$ come funzione di $\mathbb{R}[X]$ in sé, di $\mathbb{R}[X]_{\leqslant n}$ in sé, di $\mathbb{R}[[X]]$ in sé (per definizione abbiamo $D(\sum_i \alpha_i X^i) = \sum_i i\alpha_i X^{i-1}$). In ciascuno dei tre casi:
(a) verificare che si tratta di una applicazione $\mathbb{R}$-lineare;
(b) descrivere nucleo e immagine di D, specificando le dimensioni;
(c) determinare se D è o meno iniettiva, suriettiva, biiettiva;
(d) ripetere l'esercizio sostituendo $\mathbb{R}$ con il corpo $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

4. Per ognuna delle seguenti condizioni, definire se possibile un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ (non nulli e) che la verifichi:
(a) nucleo e immagine coincidano;
(b) il nucleo contenga l'immagine;
(c) il nucleo sia non nullo e contenuto nell'immagine;
(d) nucleo e immagine siano complementari;
(e) il nucleo sia diverso dall'immagine e la somma dei due non sia diretta.
Stesso problema nel caso di endomorfismi di $\mathbb{R}^4$.

5. Sia V uno spazio vettoriale sul corpo C. Verificare che
(a) se $\alpha : V \to V$ è una applicazione lineare, allora $\{v \in V : \alpha(v) = v\}$ è un sottospazio di V;
(b) se $W \leqslant V$, allora esiste una applicazione lineare $\beta : V \to V$ tale che $\{v \in V : \beta(v) = v\} = W$.

6. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione 3 e base v_1, v_2, v_3. Sia φ_λ l'applicazione lineare definita da

$$\varphi(v_1) = (\lambda-1)v_1 + 2v_2 - (\lambda+1)v_3, \qquad \varphi(v_2) = 2v_1 - \lambda v_3, \qquad \varphi(v_3) = -\lambda v_1 - v_2 + (\lambda+2)v_3$$

al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$
(a) determinare immagine e nucleo di φ_λ al variare di λ;
(b) per quali valori di λ l'immagine dell'applicazione φ_λ contiene il vettore $v_1 + 2v_2 + 2v_3$?
(c) l'unione dei nuclei di φ_λ al variare di λ genera V?

7. Scrivere le proiezioni su U nella direzione di W, e di W nella direzione di U per i seguenti due sottospazi di $\mathbb{R}^3$: $U = \langle \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right) \rangle$ e $W = \langle \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right) \rangle$.

8. Scrivere le proiezioni su U nella direzione di W, e di W nella direzione di U per i seguenti due sottospazi di $\mathbb{R}^4$: $U = \langle \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\\0\end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\\1\end{smallmatrix}\right) \rangle$ e W definito da $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

9. Si considerino gli $\mathbb{R}$-spazi vettoriali $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$.
(a) Si mostri che una applicazione di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ è lineare se e solo se è del tipo seguente:

$$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto (A_1 a_1 + \ldots + A_n a_n),$$

ove $A_1, \ldots, A_n$ sono numeri reli fissati, cioè una funzione polinomiale omogenea di grado 1.
Un caso particolare è l'applicazione di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ definita da $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto a_i$, ove $1 \leqslant i \leqslant n$; essa si indica con pr_i, e si dice la proiezione $i-$esima.
(b) Si mostri che un'applicazione $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è lineare se e solo se sono lineari le applicazioni $\mathrm{pr}_i \circ f$ per ogni i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

10. Proiezioni. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione n sul corpo C ed p un endomorfismo di V tale che $p^2 = p$.
(a) Si mostri che $V = \mathrm{im}\,p \oplus \ker p$.

(b) Si mostri che esistono una base $(v_1, \dots, v_n)$ di V ed un intero i, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, tali che $p(v_j) = v_j$, se $j < i$, e $p(v_j) = 0$, se $j \geqslant i$.
(c) Dedurne che si tratta della proiezione di asse $\operatorname{im} p$ e direzione $\ker p$.

11. Simmetrie. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione n sul corpo C (di caratteristica diversa da due) e s un endomorfismo di V tale che $s^2 = \mathrm{id}_V$.
(a) Si mostri che $\ker s = 0$, dunque s è un isomorfismo.
(b) Si mostri che esistono due sottospazi complementari V_+ e V_- di V tali che s agisce come l'identità su V_+ e la moltiplicazione per -1 su V_-.
(c) Si mostri che esistono una base $(v_1, \dots, v_n)$ di V ed un intero i, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, tali che $s(v_j) = v_j$, se $j < i$, e $s(v_j) = -v_j$, se $j \geqslant i$.
(d) Dedurne che si tratta della simmetria di asse V_+ e direzione V_-.

12. Siano U, V spazi vettoriali sul campo C. Siano W, Z sottospazi di U tali che $W \cap Z = 0$. Dimostrare che se $f : W \to V$ e $g : U \to V$ sono applicazioni lineari, esiste una applicazione lineare $h : U \to V$ tale che $h_{|W} = f$ e $h_{|Z} = g$. Quando h è unica?

13. Sia P_n lo spazio vettoriale dei polinomi reali di grado $\leqslant n$, e sia $D : P_n \to P_n$ l'usuale derivazione, $D(f) = f'$. Si consideri l'applicazione $\varphi : P_n \to P_n$, $f \mapsto f + xf'$.
(a) Verificare che effettivamente $f + xf' \in P_n$ se $f \in P_n$.
(b) Dimostrare che φ è lineare.
(c) Dimostrare che φ è un isomorfismo.

14. Si consideri l'endomorfismo $f_{a,b}$ di $\mathbb{R}^2$ determinato dalle condizioni $f_{a,b}(e_1) = 2e_1 + ae_2$ e $f_{a,b}(e_2) = be_1 + e_2$, dove $\{e_1, e_2\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^2$, a, $b \in \mathbb{R}$. Dimostrare che il sottospazio $U = \langle e_1 - e_2 \rangle$ è $f_{a,b}$-stabile (cioè che $f_{a,b}(U) \subseteq U$) se e solo se $a - b + 1 = 0$.

15. Si considerino i sottoinsiemi $B_t = \{(0,1,1), (1,2t,0), (t,3,1)\}$ di $\mathbb{R}^3$, per ogni $t \in \mathbb{R}$.
(a) Per quali valori di t l'insieme B_t è una base di $\mathbb{R}^3$?
(b) Per quali valori di t esiste un endomorfismo φ di $\mathbb{R}^3$ tale che $\varphi(0,1,1) = (0,1,0)$, $\varphi(1,2t,0) = (0,0,1)$, $\varphi(t,3,1) = (0,1,1)$?
(c) Per quali valori di t l'endomorfismo di cui in (b) è unico?

16. Sia M il campo $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$, e sia $f : M \to M$ l'applicazione definita mediante $a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{Q}$.
(a) Verificare che M è spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ di dimensione 2.
(b) Verificare che M è spazio vettoriale su M di dimensione 1.
(c) Verificare che f è una applicazione $\mathbb{Q}$-lineare.
(d) Verificare che f non è una applicazione M-lineare.

17. Siano V e W due spazi vettoriali su $\mathbb{R}$.
(a) Siano f un'applicazione lineare di V in W e $G_f \subset V \times W$ il suo grafico. Si mostri che se f è lineare, allora G_f è un sottospazio vettoriale di $V \times W$.
(b) Sia $G \subset V \times W$ un sottospazio; si mostri che $G = G_f$ per un qualche omomorfismo f, se e solo se l'applicazione π_V da G in V, definita da $(v, w) \mapsto v$, è un isomorfismo.
(c) Si supponga che sia $G = G_f$ per un qualche omomorfismo f. Si mostri che esiste una applicazione lineare π_W da G in W tale che $f = \pi_W \circ \pi_V^{-1}$.

18. Siano V e W spazi vettoriali su C con basi v_1, v_2, v_3, v_4 e w_1, w_2, w_3 rispettivamente.
(a) dire se esiste una applicazione lineare φ tale che

$$\varphi(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = w_1 + w_2 + w_3 \qquad \varphi(v_1 + v_2) = w_1 - w_2$$
$$\varphi(v_1 + v_2 + v_3) = 2w_1 + 2w_2 + 2w_3 \qquad \varphi(v_1 - v_2) = w_1 - w_2$$

ed eventualmente se è unica o no; calcolare nucleo e immagine, discutere iniettività e suriettività;
(b) mostrare che il sottinsieme $\{\psi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V) : \varphi \circ \psi = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ e calcolarne la dimensione e una base;
(c) mostrare che il sottinsieme $\{\vartheta \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(W) : \vartheta \circ \varphi = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(W)$ e calcolarne la dimensione e una base.

19. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul corpo C, e si indichi con V^* lo spazio vettoriale $\mathrm{Hom}_C(V, C)$.
(a) Si mostri che $f \in V^*$ è suriettivo se e solo se $f \neq 0$.
(b) Si mostri che se $f, g \in V^*$ hanno lo stesso nucleo, allora essi sono linearmente dipendenti; in quali casi è vera l'implicazione inversa?
(c) Siano $f, g \in V^*$ linearmente indipendenti; si calcoli $\dim_C(\ker f \cap \ker g)$.

Esercizi su Matrici - Matematica Due - novembre 2004

1. Sia $D : C[X]_{\leqslant 4} \to C[X]_{\leqslant 4}$ l'usuale derivazione tra polinomi;
(a) scrivere la matrice associata a D nella base canonica $1, X, X^2, X^3, X^4$;
(b) trovare una base di $C[X]_{\leqslant 4}$ fatta di polinomi di grado 4 e scrivere la matrice associata a D in questa base;
(c) scrivere la matrice di cambiamento di base tra le due basi precedenti, e verificare la relazione di cambiamento di base per le due matrici associate a D;
(d) esistono mappe inverse a destra o a sinistra per D? in caso affermativo, scriverne le matrici nelle due basi date e verificare la relazione con le matrice di D;
(e) ripetere tutto usando $D : C[X]_{\leqslant 4} \to C[X]_{\leqslant 3}$.

2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ z+x \end{pmatrix}$.
(a) Scriverne la matrice in base canonica;
(b) scriverne la matrice nella base v_1, v_2, v_3 ove v_j è il vettore di coordinate tutte uguali a 1 tranne la j-esima uguale a 0;
(c) scrivere la matrice di cambiamento di base e verificare la relazione tra le due matrici di f;
(d) discutere iniettività e suriettività di f.

3. Consideriamo la proiezione p su V nella direzione di W e la proiezione q su W nella direzione di V ove $V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ e $W = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$sono sottospazi di $\mathbb{R}^4$.
(a) verificare che $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$ e scrivere le matrici di p e q nella base di $\mathbb{R}^4$ formata giustapponendo le basi di V e di W;
(b) si scrivano le matrici A e B di p e q nella base canonica di $\mathbb{R}^4$;
(c) esplicitare le matrici di cambiamento di base e verificare le relazioni tra le matrici precedentemente trovate;
(d) vero che $AB = BA = 0$?
Consideriamo ora la simmetria s di centro V e di asse W e la simmetria t di centro W e di asse V .
(a') verificare che $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$ e scrivere le matrici di s e t nella base di $\mathbb{R}^4$ formata giustapponendo le basi di V e di W;
(b') si scrivano le matrici A e B di s e t nella base canonica di $\mathbb{R}^4$;
(c') esplicitare le matrici di cambiamento di base e verificare le relazioni tra le matrici precedentemente trovate;
(d') vero che $AB = BA$? vero che $A^2 = B^2 = \mathbb{I}_4$?

4. Sia $L : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ l'applicazione definita da $L\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
(a) Verificare che si tratta di una applicazione lineare e scriverne la matrice nella base canonica;
(b) trovare una base del nucleo di L;
(c) L è suriettiva? Trovare la dimensione e una base dell'immagine di L.

5. Sia $\varphi : C[X]_{\leqslant 4} \to C[X]_{\leqslant 4}$ la funzione definita da $\varphi(P) = P + XD(P)$ ove D è l'usuale derivazione tra polinomi;
(a) scrivere la matrice associata a φ nella base canonica $1, X, X^2, X^3, X^4$;
(b) scrivere la matrice associata a φ nella base $X^4, D(X^4), D^2(X^4), D^3(X^4), D^4(X^4)$;
(c) scrivere la matrice di cambiamento di base tra le due basi precedenti, e verificare la relazione di cambiamento di base per le due matrici associate a φ;
(d) esistono mappe inverse a destra o a sinistra per φ? in caso affermativo, scriverne le matrici nelle due basi date e verificare la relazione con le matrici di φ.

6. Sia A una matrice quadrata d'ordine n nilpotente, cioè esista un intero positivo m tale che $A^m = 0$. Mostrare che $\mathbb{I}_n + A$ è una matrice invertibile. Cosa significa la nilpotenza in termini di una applicazione lineare rappresentata da quella matrice?

7. Si diano degli esempi di matrici quadrate dello stesso ordine, non nulle, A e B tali che $AB = 0$. È vero che allora necessariamente si ha $BA = 0$ (giustificare o dare controesempi)? Interpretare gli esempi in termini di applicazioni lineari rappresentate da quelle matrici.

8. Dire se è possibile che il prodotto di tre matrici A, B, C, quadrate dello stesso ordine e non nulle, si annulli ($ABC = 0$) nei seguenti casi:

(a) A sia invertibile;
(b) B sia invertibile;
(c) C sia invertibile
(giustificare la risposta o dare dei controesempi).

9. Siano A e B due matrici quadrate dello stesso ordine. Dire che rapporti vi sono tra il fatto che A e B siano invertibili e il fatto che $A+B$ sia invertibile. Spiegare con degli esempi.

10. È vero che ogni matrice reale quadrata non (necessariamente) invertibile si può scrivere come somma di due matrici invertibili?
(a) Caratterizzare gli endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ che vengono rappresentati sempre dalla stessa matrice in ogni base (i morfismi $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tali che $\alpha_{\mathscr{V},\mathscr{V}}(\varphi) = \alpha_{\mathscr{W},\mathscr{W}}(\varphi)$ per ogni coppia di basi $\mathscr{V}$ e $\mathscr{W}$ di $\mathbb{R}^n$).
(b) Caratterizzare l'insieme di tutte le matrici quadrate d'ordine n che commutano con tutte le altre matrici (le matrici A tali che $AB = BA$ per ogni altra matrice B; quest'insieme si dice il centro dell'algebra delle matrici).
(c) Che relazione c'è tra i due punti precedenti?

11. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$:
(a) determinare, se esistono, le matrici $B \in M_{3\times 2}(\mathbb{Q})$ tali che $AB = \mathbb{I}_2$;
(b) determinare, se esistono, le matrici $C \in M_{3\times 2}(\mathbb{Q})$ tali che $CA = \mathbb{I}_3$;
(c) discutere i punti precedenti in termini di applicazioni lineari, se già non si è fatto;
(d) descrivere l'insieme di cui al punto (a) in termini dello spazio vettoriale $M_{3\times 2}(\mathbb{Q})$.

12. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & -8 \\ 3 & 6 & -12 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ e sia $U = \{B \in M_3(\mathbb{R}) : ABC = 0\}$;
(a) mostrare che U è un sottospazio di $M_3(\mathbb{R})$;
(b) calcolare la dimensione di U su $\mathbb{R}$;
(c) trovare una base di U

13. Siano $A \in M_2(\mathbb{Q})$ e $B \in M_3(\mathbb{Q})$; si consideri l'applicazione $\tau : M_{2\times 3}(\mathbb{Q}) \to M_{2\times 3}(\mathbb{Q})$ definita da $\tau(X) = AXB$.
(a) Si mostri che τ è lineare;
(b) si mostri che τ è invertibile se e solo se A e B sono invertibili;
(c) si scriva una base di τ nella base canonica con l'ordine lessicografico;
(d) stimare le dimensioni di nucleo e immagine di τ in funzione dei ranghi di A e B.

14. Si considerino gli spazi vettoriali V e W su $\mathbb{R}$ con le rispettive basi $\mathscr{V} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ e $\mathscr{W} = (w_1, w_2, w_3)$.
(a) Si dica se esiste un'applicazione lineare $\varphi : V \to W$ che soddisfa alle seguenti condizioni

$$\varphi(v_1+v_2) = 2w_1 + w_2 + 3w_3, \qquad \varphi(v_2+v_3) = 2w_1 + 2w_2 + 5w_3,$$
$$\varphi(v_1+v_2+v_3) = 4w_1 + 2w_2 + 6w_3, \qquad \varphi(v_2+v_3+v_4) = 4w_1 + w_2 + 4w_3;$$

e se ne scriva la matrice rispetto alle basi date.
(b) Si mostri che il sottoinsieme $A = \{\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V) : \varphi \circ \psi = 0\}$ è un sottospazio dello spazio vettoriale $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V)$ e se ne calcoli la dimensione. Sia $\alpha_{\mathscr{V},\mathscr{V}} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V) \to M_4(\mathbb{R})$ l'applicazione che ad ogni endomorfismo di V associa la sua matrice, rispetto alla base $\mathscr{V}$. Si determini una base per il sottospazio immagine di A.
(c) Si mostri che il sottoinsieme $B = \{\vartheta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W,W) : \vartheta \circ \varphi = 0\}$ è un sottospazio dello spazio vettoriale $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W,W)$ e se ne calcoli la dimensione. Sia $\alpha_{\mathscr{W},\mathscr{W}} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W,W) \to M_3(\mathbb{R})$ l'applicazione che ad ogni endomorfismo di W associa la sua matrice, rispetto alla base $\mathscr{W}$. Si determini una base per il sottospazio immagine di B.
(d) Si consideri il sottinsieme $C = \{(\psi, \vartheta) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W,W) : \vartheta \circ \varphi \circ \psi = 0\}$ del prodotto cartesiano $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W,W)$, e si mostri che $A \times B$ è contenuto in C. È vero o falso che $A \times B = C$? È vero o falso che C sia un sottospazio di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W,W)$?

15. Disuguaglianza di Frobenius. Date due applicazioni lineari $\varphi : U \to V$ e $\psi : V \to W$, mostrare che $\dim \mathrm{im}\,(\psi\circ\varphi) \geqslant \dim \mathrm{im}\,\varphi + \dim \mathrm{im}\,\psi - \dim V$. Dedurre che date due matrici $A \in M_{m,n}(C)$ e $B \in M_{n,l}(C)$, si ha $\mathrm{rg}(AB) \geqslant \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B) - n$.

Esercizi su Sistemi Lineari - Matematica Due - dicembre 2004

1. Risolvere il sistema lineare $Ax = b$ di matrice completa $\begin{pmatrix} 10 & 23 & 17 & 44 & 25 \\ 15 & 35 & 26 & 69 & 40 \\ 25 & 57 & 42 & 108 & 65 \\ 30 & 69 & 51 & 133 & 95 \end{pmatrix}$.

2. Al variare di $\ell \in \mathbb{R}$, risolvere i sistemi lineari $A_\ell x = b_\ell$ di matrice completa

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 8 & -6 & -1 & -5 & 9 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & \ell \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 14 & 1 & 7 & 4 \\ 2 & -3 & 3 & \ell & 7 \end{pmatrix}.$$

3. Al variare di $\ell \in \mathbb{R}$ risolvere l'equazione $XA_\ell = 0$, dove $A_\ell = \begin{pmatrix} \ell & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. In questo problema l'incognita è la matrice $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, quindi l'equazione $XA_\ell = 0$ diventa un sistema lineare omogeneo in $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$.

4. Sia $\Sigma : Ax = b$ un sistema lineare con $A \in M_{m\times n}(K)$. Sia $H \in M_m(K)$ e $\Pi : HAx = b$. Se Σ ha soluzioni, Π ha soluzioni? In generale che relazione c'è tra i due insiemi di soluzioni? La stessa domanda con H invertibile.

5. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi $U = \langle \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\\0\end{smallmatrix}\right) \rangle$, e $V = \langle \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\\1\end{smallmatrix}\right) \rangle$. Determinare tre sistemi lineari tali che U, V e $U \cap V$ ne siano rispettivamente gli insiemi delle soluzioni. Risolvere lo stesso problema trovando però sistemi minimali di equazioni per ciascuno dei sottospazi U, V e $U \cap V$.

6. Sia S l'insieme $\left\{ \left(\begin{smallmatrix}2\lambda-1\\\mu+3\\3\lambda+1\\-\lambda+\mu\end{smallmatrix}\right) \text{ tali che } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$. Determinare un sistema lineare il cui insieme delle soluzioni coincide con S.

7. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Dimostrare che l'insieme delle matrici che commutano con A (cioè l'insieme delle matrici $B \in M_2(\mathbb{R})$ tali che $AB = BA$) è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ e calcolarne la dimensione. Per ogni intero n calcolare A^n. Determinare, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, la dimensione dello spazio delle matrici di $M_2(\mathbb{R})$ che commutano con A^n.

8. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ si consideri il sistema lineare $\Sigma_t : \begin{cases} -tx + (t-1)y + z = -1 \\ (t-1)y + tz = 1 \\ 2x + z = 5 \,. \end{cases}$ Sia S_t l'insieme delle soluzioni di Σ_t.

(a) Per quali valori di t S_t è costituito da un solo punto?
(b) Per quali valori di t S_t è vuoto?
(c) Per quali valori di t le soluzioni del sistema omogeneo associato a Σ_t è un sottospazio S_t^0 di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1?
(d) Per i valori di t di cui al punto (c), esibire equazioni parametriche di S_t^0.

9. Sia dato il sistema lineare reale Σ_k: $A_k x = b_k$ di matrice completa $C_k = \begin{pmatrix} 0 & 2k & k^2-1 & 0 \\ k & -1 & -k & -1 \\ 1 & -k & 1 & k \end{pmatrix}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$. Determinare per quali valori di k Σ_k ammette un'unica soluzione e, in questi casi, determinare la soluzione di Σ_k. Risolvere lo stesso problema su $\mathbb{C}$.

10. Consideriamo il sistema lineare reale $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = \lambda \\ (2-\lambda)x + y + z = 1 \end{cases}$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Discutere i ranghi delle matrici completa e incompleta al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.
(b) Determinare per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni S_λ.
(c) Descrivere l'insieme S unione di tutti gli S_λ.

11. Come l'esercizio precedente, usando il sistema $\begin{cases} x + (1-\lambda)y + z = 1 + \lambda \\ (2-\lambda)x + (\lambda-1)^2 y + \lambda z = 3 - \lambda^2 \\ x + (\lambda-1)z = 2 + \lambda \end{cases}$

12. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Si discuta il sistema $AX = b$ al variare di b in $\mathbb{R}^4$; in particolare si mostri che i b per i quali il sistema ammette soluzione, sono tutte e sole le soluzioni di un'equazione lineare omogenea.

13. Si consideri il seguente sistema lineare $\begin{cases} lx + my - mz = m \\ mx - ly = l \\ x - y - z = 0 \end{cases}$.
Si dica per quali coppie $(l, m) \in \mathbb{R}^2$ il sistema ammette soluzioni, e per quali la soluzione è unica.

14. Calcolare il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & t & 0 & 1 \\ t & t & 2t + t^2 & t^2 & 0 \end{pmatrix}$ al variare di t in $\mathbb{R}$.

15. Si calcolino le inverse delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Si indichino con A e B gli spazi delle soluzioni dei seguenti sistemi lineari omogenei:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_4 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3\lambda x_3 = 0 \\ (\lambda+1)x_1 + 2x_2 - 3\lambda x_3 + x_4 = 0 \\ 2\lambda x_2 - 3x_3 + 2\lambda x_4 = 0 \end{cases}$$

Si determini la funzione d definita su $\mathbb{R}$ da $d(\lambda) = \dim(A \cap B)$.

17. Un quadrato magico è una matrice quadrata, con termini interi positivi o nulli, tale che le somme dei termini su ogni riga, su ogni colonna e sulle due diagonali coincidano tutte. Determinare tutti i quadrati magici d'ordine 2 (sono solo quelli banali, con tutte le entrate uguali) e 3 (mostrare in particolare che il termine centrale della matrice è necessariamente un terzo della somma).

18. (IL RANGO PER RIGHE COINCIDE CON IL RANGO PER COLONNE) Siano C un campo e $A \in M_{m\times n}(C)$; allora indicheremo con $(A_{(1)}, \dots, A_{(n)})$ (risp. con $(A^{(1)}, \dots, A^{(m)})$) le colonne (risp. le righe) di A; quindi $A = (A_{(1)} \dots A_{(n)}) = \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(m)} \end{pmatrix}$.

Definiamo $\mathrm{rkc}(A) = \dim\langle A_{(1)}, \dots, A_{(n)}\rangle$ e $\mathrm{rkr}(A) = \dim\langle A^{(1)}, \dots, A^{(m)}\rangle$.

(a) Sia $Y \in M_{n\times n}(C)$; si mostri che $\mathrm{rkc}(AY) \leqslant \mathrm{rkc}(A)$ e che $\mathrm{rkr}(AY) \leqslant \mathrm{rkr}(A)$;
(b) Sia $Y \in GL_n(C)$; si mostri che $\mathrm{rkc}(AY) = \mathrm{rkc}(A)$ e che $\mathrm{rkr}(AY) = \mathrm{rkr}(A)$;
(c) Sia $X \in M_{n\times n}(C)$; si mostri che $\mathrm{rkc}(XA) \leqslant \mathrm{rkc}(A)$ e che $\mathrm{rkr}(XA) \leqslant \mathrm{rkr}(A)$;
(d) Sia $X \in GL_n(C)$; si mostri che $\mathrm{rkc}(XA) = \mathrm{rkc}(A)$ e che $\mathrm{rkr}(XA) = \mathrm{rkr}(A)$;
(e) Si mostri che $\mathrm{rkc}(A) = \mathrm{rkr}(A)$.

19. Con le notazioni dell'esercizio precedente, sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

(a) Calcolare il rango di A;
(b) Trovare una matrice $Y \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, tale che $AY = (B_{(1)} B_{(2)} 0)$;
(c) Trovare una matrice $X \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, tale che $XA = \begin{pmatrix} C^{(1)} \\ C^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix}$;
(d) Trovare X, Y come nei punti precedenti, e tali inoltre che $XAY = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.