

## Programma del corso di Geometria 1 (a.a. 2008/09)

Prima parte:

### Numeri Complessi

- Numeri complessi ed operazioni. Valore assoluto e coniugio. Rappresentazione algebrica e rappresentazione trigonometrica di un numero complesso. Argomento. Piano di Gauss.
- Formule di De Moivre, radici dell'unità, Teorema Fondamentale dell'Algebra (solo enunciato).

### Spazi Vettoriali

- Definizione ed esempi fondamentali
- Definizione ed esempi di sottospazi. Criteri per sottospazi. Sottospazio generato. Intersezione e somma di sottospazi. Somma diretta.
- Spazio vettoriale quoziente, proiezione canonica.
- Dipendenza ed indipendenza lineare.
- Base di uno spazio vettoriale, definizione e prime proprietà.
- Esistenza di basi e loro cardinalità. Lemma di scambio e sue conseguenze. Dimensione di uno spazio vettoriale.
- Coordinate associate ad una base (ordinata). Equazioni parametriche e cartesiane per un sottospazio
- Relazioni di Grassmann.

### Applicazioni Lineari e Matrici

- Applicazioni lineari. Nucleo ed immagine di un'applicazione lineare. Rango di un'applicazione lineare e Formula delle dimensioni.
- Iniettività e suriettività di un'applicazione lineare. Isomorfismi.
- Primo Teorema di Isomorfismo.
- Lo spazio vettoriale  $\text{Hom}_C(V, W)$ . Composizione di funzioni lineari.
- Matrici. Lo spazio vettoriale  $M_{m \times n}(C)$  e la sua base canonica. Prodotto di matrici. Matrici scalari e matrici diagonali. Matrici invertibili. Il gruppo  $GL(n, C)$ .
- Matrice associata ad un'applicazione lineare.
- L'isomorfismo  $\alpha_{V, W} : \text{Hom}_C(V, W) \rightarrow M_{m \times n}(C)$ .
- Composizione di applicazioni lineari e prodotto di matrici.
- Matrici di cambiamento di base. Equivalenza tra matrici.
- Rango di una matrice. Matrice trasposta di una matrice data. Rango per riga e rango per colonna
- Spazio vettoriale duale ed applicazione trasposta.

### Sistemi Lineari

- Sistemi lineari. Scrittura matriciale ed interpretazione vettoriale. Teorema di Rouché–Capelli.
- Tecnica di Eliminazione (Gauss). Matrici Elementari ed operazioni elementari sulle righe. Equivalenza per righe e matrici a scalini.

### Determinanti

- Funzioni multilineari alternanti su uno spazio vettoriale di dimensione finita.
- Determinante di un endomorfismo e determinante di una matrice quadrata.
- Determinante ed invertibilità. Teorema di Binet.
- Sviluppi di Laplace e matrici inverse. Applicazioni della tecnica di Gauss al calcolo di determinanti. Alcuni determinanti notevoli.

*Legenda:* tutti gli argomenti devono essere noti; la difficoltà indicata dai pallini è:

- e •• costruzioni e dimostrazioni da sapere per superare l'esame;
- e ••• costruzioni e dimostrazioni da sapere per ottenere un buon voto.

## Programma del corso di Geometria 1 (a.a. 2008/09)

Seconda parte:

### Forme Canoniche di Matrici:

- classificazione per equivalenza e similitudine (triangolarizzabilità e diagonalizzabilità)
- autovalori, autovettori (autospazi, somma diretta)
- polinomio caratteristico (determinante, traccia e altri invarianti), indipendenza dalla base
- molteplicità e nullità, relazione tra loro e primo criterio di diagonalizzabilità
- criterio di triangolarizzabilità
- teorema di Hamilton-Cayley
- mappa di valutazione (polinomi e matrici); polinomio minimo, relazioni con il caratteristico
- teorema di decomposizione
- secondo criterio di diagonalizzabilità
- teoria di Jordan: decomposizione in endomorfismi con unico autovalore, forme canoniche degli endomorfismi nilpotenti, forme canoniche di Jordan, teorema di Jordan, invarianti di classificazione (tipo di nilpotenza), forme canoniche per  $n = 2, 3, 4$

### Geometria Affine:

- definizione di spazio affine, riferimenti affini e coordinate
- sottospazi affini, equazioni parametriche e cartesiane
- intersezioni e sottospazi affini generati (congiungenti)
- posizioni reciproche: sottovarietà parallele, incidenti, sghembe, teorema di Grassmann affine
- calcolo baricentrico: riferimenti baricentrici e coordinate; descrizione baricentrica dei sottospazi affini; caso reale: segmenti, triangoli, semplici
- applicazioni affini e affinità, applicazioni lineari associate e rappresentazioni matriciali
- traslazioni, affinità centrali, omotetie, decomposizioni
- azione delle trasformazioni affini sui sottospazi affini; punti e sottospazi uniti per una affinità

### Geometria Euclidea:

- prodotto scalare standard in  $\mathbb{R}^n$  e sue proprietà, positività e norma
- disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e misura di angoli
- ortogonalità, teoremi di Pitagora e di Carnot (coseno), proiezione ortogonale
- ortogonali di sottospazi e interpretazione euclidea delle equazioni cartesiane
- basi ortonormali, metodo di Gram-Schmidt, formula di Parseval
- gruppi ortogonale, ortogonale speciale e conforme, strutture di  $O_n(\mathbb{R})$ ,  $SO_n(\mathbb{R})$  per  $n = 2, 3, 4$
- matrici simmetriche e teorema spettrale per matrici reali, simmetrie e proiezioni ortogonali
- teorema di Schur (triangolarizzazione ortogonale)
- equivalenza ortogonale per matrici rettangolari (valori singolari); decomposizione polare
- prodotto vettore nello spazio tridimensionale, sue proprietà,
- identità di Lagrange e sue generalizzazioni (calcolo di volumi di  $r$ -edri in  $\mathbb{R}^n$ )
- definizione di spazi euclidei, ortogonalità, riferimenti ortonormali
- distanza tra sottospazi affini, punti di minima distanza;
- calcoli di distanza, aree, volumi ed angoli (in particolare  $n = 2, 3, 4$ )
- trasformazioni euclidee: rigidità o isometrie (dirette e inverse), similitudini (dirette e inverse), traslazioni e decomposizioni con isometrie centrali, classificazione (di Eulero) delle rigidità in dimensioni 2 e 3

### Geometria Hermitiana:

- prodotto hermitiano standard in  $\mathbb{C}^n$  e sue proprietà, norma, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, teoremi di Pitagora e Carnot hermitiani
- proiezioni ortogonali, basi ortonormali e formula di Parseval
- gruppi unitario e unitario speciale, strutture di  $U_2(\mathbb{C})$ ,  $SU_2(\mathbb{C})$
- matrici hermitiane, normali e teorema spettrale per matrici complesse
- teorema di Schur (triangolarizzazione unitaria)
- equivalenza unitaria per matrici rettangolari (valori singolari); decomposizione polare