Spazio quoziente e Spazio duale

maurizio candilera

October 1, 2018

Spazio vettoriale quoziente

Cominciamo con la definizione dello spazio vettoriale quoziente. Salvo diverso avviso, le affermazioni valgono per spazi vettoriali qualsiansi, non necessariamente di dimensione finita.

Proposizione

Sia V uno spazio vettoriale sul campo K e sia W un suo sottospazio.

(a) Si definisce una relazione di equivalenza su V ponendo

$$v \sim v' \overset{def.}{\iff} v - v' \in W.$$

Le classi di equivalenza sono le *classi laterali* di W, ovvero gli insiemi del tipo $v + W = \{\, v + w \mid w \in W \,\}$.

(b) L'insieme quoziente V/W ha una struttura naturale di spazio vettoriale su K definendo le operazioni sui rappresentanti delle classi laterali, ovvero $(v_0 + W) + (v_1 + W) = (v_0 + v_1) + W$ e $a(v + W) = (av) + W$.

(c) L'applicazione naturale $\pi : V \to V/W$ che manda ogni vettore $v \in V$ nella sua classe di equivalenza $v + W \in V/W$ è un omomorfismo suriettivo di spazi vettoriali.

Andiamo a verificare le affermazioni nella prossima slide.

dim. (*a*) Verifichiamo che si tratta di una relazione di equivalenza. È riflessiva: $v \sim v$ perché $v - v = 0 \in W$. È simmetrica perché, se $v \sim v'$, allora $v - v' \in W$ e anche il suo opposto $v' - v \in W$, per cui $v' \sim v$. Infine, è transitiva, perché se $v \sim v'$ e $v' \sim v"$, allora $v - v" = (v - v') + (v' - v") \in W$, e quindi $v \sim v"$. Tutte le proprietà discendono dal fatto che W è sottospazio.
Sia fissato $v \in V$ e consideriamo la classe laterale $v + W = \{ v + w \mid w \in W \}$ e la classe di equivalenza $[v]_W = \{ v' \in V \mid v' - v \in W \}$. Chiaramente $v + W \subseteq [v]_W$; viceversa, se $v' \sim v$, allora $v' = v + (v' - v)$, con $v' - v \in W$ e quindi $[v]_W \subseteq v + W$.

(*b*) Dobbiamo verificare che le operazioni definite nell'enunciato sono ben definite, ovvero che il risultato dipende solo dalla classe e non dai rappresentanti. Siano dunque $v_0 \sim v_0'$ e $v_1 \sim v_1'$; allora

$$(v_0+v_1)-(v_0'+v_1') = (v_0-v_0')+(v_1-v_1') \in W \quad \text{e quindi} \quad (v_0+v_1)+W = (v_0'+v_1')+W.$$

Analogamente, se $v_0 \sim v_0'$ e $a \in K$, allora $av_0 - av_0' = a(v_0 - v_0') \in W$, per cui $av_0 + W = av_0' + W$. Che le operazioni così definite soddisfino agli assiomi di spazio vettoriale, discende dalle analoghe proprietà dei rappresentanti. Ad esempio: $0 + W$ è l'elemento neutro e $(-v) + W$ è l'opposto di $v + W$.

(*c*) Poiché le operazioni sono definite sui rappresentanti delle classi laterali, è chiaro che l'applicazione $\pi : v \mapsto v + W$ è un omomorfismo di spazi vettoriali. Poiché V/W è l'insieme delle classi di equivalenza dei vettori di V è chiaro che π è suriettivo. $\square$

Negli spazi di dimensione finita c'è una facile relazione tra le dimensioni di V, W e V/W.

Osservazione

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e W un sottospazio di dimensione k. Sia $v_1, \dots, v_k$ una base di W e siano $v_{k+1}, \dots, v_n$ dei vettori che la completano a una base di V. Allora le classi laterali $v_{k+1} + W, \dots, v_n + W$ sono una base di V/W. Dunque: $\dim V/W = \dim V - \dim W$.

dim. Sia $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$ un vettore di V e osserviamo che

$$v - x_{k+1} v_{k+1} - \cdots - x_n v_n = x_1 v_1 + \cdots + x_k v_k \in W$$

e quindi

$$v + W = (x_{k+1} v_{k+1} + \cdots + x_n v_n) + W = (x_{k+1} v_{k+1} + W) + \cdots + (x_n v_n + W).$$

Dunque le classi laterali $v_{k+1} + W, \dots, v_n + W$ generano lo spazio vettoriale V/W. Per verificare che sono linearmente indipendenti, sia

$$0 + W = c_{k+1}(v_{k+1} + W) + \cdots + c_n(v_n + W) = (c_{k+1} v_{k+1} + \cdots + c_n v_n) + W.$$

Per quanto visto nell'esercizio precedente, ciò significa che $c_{k+1} v_{k+1} + \cdots + c_n v_n$ appartiene a W e ciò implica che $c_{k+1} = \cdots = c_n = 0$, perché $v_{k+1}, \dots, v_n$ completano una base di W a una base di V. $\square$

Teoremi di Isomorfismo

I teorema di isomorfismo

Sia $\phi\colon V \to W$ un'applicazione lineare di K-spazi vettoriali. L'applicazione $\phi_0\colon V/\ker\phi \to \operatorname{im}\phi \subseteq W$, definita ponendo $\phi_0(v + \ker\phi) := \phi(v)$, è ben definita e induce un isomorfismo di spazi vettoriali tra $V/\ker\phi$ ed $\operatorname{im}\phi$, tale da rendere commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & W \\ V/\ker\phi \arrow[r, "\cong", "\phi_0"'] & \operatorname{im}\phi \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

ove π è la proiezione canonica e j è l'inclusione naturale.

dim. L'applicazione ϕ_0 è ben definita perché il suo valore non dipende dalla scelta del rappresentante, ma solo dalla classe laterale. Se $v' + \ker\phi = v + \ker\phi$, si ha che $v' = v + u$ con $u \in \ker\phi$ e

$$\phi(v') = \phi(v + u) = \phi(v) + \phi(u) = \phi(v).$$

Dalla linearità di ϕ, discende quella di ϕ_0 ed è evidente la commutatività del diagramma. Inoltre, ϕ_0 è suriettiva su $\operatorname{im}\phi$, perché, dato $w_0 = \phi(v_0) \in \operatorname{im}\phi$, si ha $\phi_0(v_0 + W) = \phi(v_0) = w_0$ e quindi, $\operatorname{im}\phi_0 = \operatorname{im}\phi$. Infine, $\phi_0(v + \ker\phi) = 0$ se, e solo se, $v \in \ker\phi$, ovvero se, e solo se, $v + \ker\phi = \ker\phi = 0 + \ker\phi$. Dunque, $\ker\phi_0$ contiene solo l'elemento neutro del quoziente $V/\ker\phi$ per cui ϕ_0 è un isomorfismo.

La tecnica di eliminazione di Gauss permette di rendere esplicita la decomposizione di un'applicazione lineare descritta nel I teorema di isomorfismo. Diamo un esempio qui sotto.

Esempio: Sia $\phi : \mathbb{Q}^7 \to \mathbb{Q}^5$ l'applicazione lineare di matrice A nelle basi canoniche, ove

$$\alpha_{\mathcal{E}_7,\mathcal{E}_5}(\phi) = A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 3 & -14 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 6 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & -3 & 0 & 2 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \in M_{5\times 7}(\mathbb{Q}).$$

(a) Dai generatori $e_1 + \ker\phi, \dots, e_7 + \ker\phi$ si estragga una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_r\}$ di $\mathbb{Q}^7/\ker\phi$, ove $r = \operatorname{rk}\phi$ e si determini la matrice $P = \alpha_{\mathcal{E}_7,\mathcal{V}}(\pi)$ della proiezione canonica $\pi : \mathbb{Q}^7 \to \mathbb{Q}^7/\ker\phi$.

(b) Sia $\mathcal{V}$ la base al punto precedente, e siano $w_i = \phi_0(v_i)$ per $i = 1, \dots, r$. Allora $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_r\}$ è una base dell'immagine di ϕ e si determini la matrice $J = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{E}_5}(j)$, ove $j : \operatorname{im}\phi \to \mathbb{Q}^5$ è l'immersione naturale.

(c) Sia $\phi_0 : \mathbb{Q}^7/\ker\phi \to \operatorname{im}\phi$ l'isomorfismo indotto da ϕ. Si determini la matrice $I = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi_0)$ e si verifichi che $A = JIP$.

Svolg.: (*a*) Portiamo A in forma a scala ridotta.

$$A \sim \begin{array}{r} V \\ III \\ I-2V \\ II+V \\ IV-V \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & -12 & 0 & -3 & 15 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{r} I \\ II \\ (III-II)/4 \\ IV-3II \\ V+II \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{array}{r} I+3III \\ II-III \\ III \\ IV+6III \\ V-4III \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dalla matrice in forma a scala ridotta si vede che $e_1 \notin \ker\phi$, $e_2 + 3e_1 \in \ker\phi$, $e_3 + \ker\phi \notin \langle e_1 + \ker\phi \rangle$, $e_4 - 2e_1 + 4e_3 \in \ker\phi$, $e_5 - e_1 \in \ker\phi$, $e_6 + \ker\phi \notin \langle e_1 + \ker\phi, e_3 + \ker\phi \rangle$ e $e_7 + e_1 - 3e_3 + 2e_6 \in \ker\phi$. Per cui $\operatorname{rk}\phi = 3$ e

$$v_1 = e_1 + \ker\phi, \quad v_2 = e_3 + \ker\phi, \quad v_3 = e_6 + \ker\phi$$

è una base $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{Q}^7/\ker\phi$ e $P = \alpha_{\mathcal{E}_7,\mathcal{V}}(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(*b*) I vettori $\phi(e_1), \phi(e_3), \phi(e_6)$ sono una base di $\operatorname{im}\phi$ e le colonne di A corrispondenti ai pivot sono le coordinate di questi vettori nella base $\mathcal{E}_5$. Dunque $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

(*c*) Abbiamo posto $w_i = \phi_0(v_i)$ per $i = 1, 2, 3$, per cui $I = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi_0) = \mathbf{1}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Necessariamente $JIP = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{E}_5}(j)\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi_0)\alpha_{\mathcal{E}_7,\mathcal{V}}(\pi) = \alpha_{\mathcal{E}_7,\mathcal{E}_5}(j\phi_0\pi) = \alpha_{\mathcal{E}_7,\mathcal{E}_5}(\phi) = A$. □

Il teorema di isomorfismo

Sia V uno spazio vettoriale su K e si considerino due sottospazi $U \subseteq W \subseteq V$. L'applicazione $\phi\colon V/U \to V/W$, definita ponendo $\phi(x+U) = x+W$, è un'applicazione lineare suriettiva che induce un isomorfismo $\phi_0\colon V/W \cong \dfrac{V/U}{W/U}$.

dim. Per prima cosa osserviamo che ϕ è ben definita perché $U \subseteq W$ e quindi $x - x' \in U \subseteq W$ implica che $\phi(x+U) = x+W = x'+W = \phi(x'+U)$. Inoltre, ϕ è evidentemente suriettiva, perché data una generica classe laterale, $v+W$ in V/W, si ha $v+W = \phi(v+U) \in \operatorname{im}\phi$. Il nucleo di ϕ è costituito dalle classi $v+U$ per cui $v+W = W$, ovvero $v \in W$, cioè gli elementi del quoziente W/U. Dunque, per il I Teorema di Isomorfismo $V/W = \operatorname{im}\phi$ è isomorfo a $\frac{V/U}{\ker\phi} = \frac{V/U}{W/U}$. □

II teorema di isomorfismo

Sia V uno spazio vettoriale su K e si considerino due sottospazi $U \subseteq W \subseteq V$. L'applicazione $\phi\colon V/U \to V/W$, definita ponendo $\phi(x+U) = x+W$, è un'applicazione lineare suriettiva che induce un isomorfismo $\phi_0\colon V/W \cong \dfrac{V/U}{W/U}$.

dim. Per prima cosa osserviamo che ϕ è ben definita perché $U \subseteq W$ e quindi $x - x' \in U \subseteq W$ implica che $\phi(x+U) = x+W = x'+W = \phi(x'+U)$. Inoltre, ϕ è evidentemente suriettiva, perché data una generica classe laterale, $v+W$ in V/W, si ha $v+W = \phi(v+U) \in \mathrm{im}\,\phi$. Il nucleo di ϕ è costituito dalle classi $v+U$ per cui $v+W = W$, ovvero $v \in W$, cioè gli elementi del quoziente W/U. Dunque, per il I Teorema di Isomorfismo $V/W = \mathrm{im}\,\phi$ è isomorfo a $\frac{V/U}{\ker\,\phi} = \frac{V/U}{W/U}$. □

III teorema di isomorfismo

Sia V uno spazio vettoriale su K e si considerino due sottospazi U, W di V e l'applicazione composta $\pi \circ j\colon U \to (U+W)/W$, ove $j\colon U \to U+W$ è l'inclusione naturale e $\pi\colon U+W \to (U+W)/W$ è la proiezione canonica. Allora $\pi \circ j$ induce un isomorfismo $\dfrac{U+W}{W} \cong \dfrac{U}{U\cap W}$.

dim. Preso un generico elemento $x+W$ del quoziente $(U+W)/W$, si ha $x = u+w$ per opportuni vettori $u \in U$ e $w \in W$. Dunque, $x-u = w \in W$ e perciò $x+W = u+W \in \mathrm{im}\,(\pi\circ j)$, ovvero $\pi \circ j$ è suriettiva. Inoltre, dato $u \in U$, $\pi(j(u)) = u+W = 0+W$ se, e solo se, $u \in U\cap W$ e quindi $\ker\,(\pi\circ j) = U\cap W$. Applicando il I Teorema di Isomorfismo si conclude che $(U+W)/W = \mathrm{im}\,(\pi\circ j)$ è isomorfo a $\frac{U}{\ker\,(\pi\circ j)} = \frac{U}{U\cap W}$.

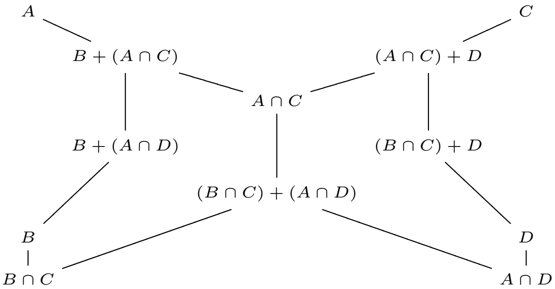
Esercizio : [Butterfly Lemma, H.J. Zassenhaus, 1934] Sia V uno spazio vettoriale sul campo K. Siano dati i sottospazi $A \supseteq B$ e $C \supseteq D$ e si considerino i sottospazi nel diagramma seguente, ove le linee indicano le relazioni di inclusione.

(a) Si utilizzino il secondo e il terzo teorema di isomorfismo per verificare gli isomorfismi indicati qui sotto

$$\frac{B+(A\cap C)}{B+(A\cap D)} \cong \frac{\frac{B+(A\cap C)}{B}}{\frac{B+(A\cap D)}{B}} \cong$$

$$\cong \frac{\frac{A\cap C}{B\cap C}}{\frac{A\cap D}{B\cap D}} \cong \frac{\frac{A\cap C}{B\cap C}}{\frac{(B\cap C)+(A\cap D)}{B\cap C}} \cong$$

$$\cong \frac{A\cap C}{(B\cap C)+(A\cap D)}.$$



(b) Si verifichi, analogamente, che
$$\frac{D+(A\cap C)}{D+(B\cap C)} \cong \frac{A\cap C}{(B\cap C)+(A\cap D)}.$$

(c) Si concluda che $\dfrac{B+(A\cap C)}{B+(A\cap D)} \cong \dfrac{(A\cap C)+D}{(B\cap C)+D}$.

[Farlo o vedere l'Esercizio 2.30 del libro.]

Spazio vettoriale duale

Cominciamo con la definizione dello spazio vettoriale duale di uno spazio V, che vale per spazi vettoriali di dimensione qualunque, ma alcuni dei risultati nel seguito sono validi solo su spazi di dimensione finita.

Proposizione

Sia V uno spazio vettoriale sul campo K. Si chiama *spazio vettoriale duale* lo spazio $V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K)$ delle *forme lineari* su V. Si chiama *dualità canonica* l'applicazione $\circ\colon V^* \times V \to K$, definita ponendo $\xi \circ v := \xi(v)$, per ogni coppia $(\xi, v) \in V^* \times V$.

Le forme lineari su V sono quindi dei vettori che "si uniscono" ai vettori di V tramite la dualità canonica per dare come risultato uno scalare.
In alcuni testi si usa la notazione $\langle \xi, v \rangle$ per indicare $\xi \circ v$. Qui viene evitata per non creare confusione con la notazione usata per il sottospazio generato da due vettori.

Andiamo a descrivere alcune proprietà della dualità canonica, e cominciamo con una definizione generale di "accoppiamento" (pairing) tra due spazi vettoriali.

Definizione

Siano V e W due spazi vettoriali sul campo K, un'applicazione $g\colon V \times W \to K$ è un'*applicazione bilineare* se

$$\begin{aligned} g(v, aw + bw') &= ag(v, w) + bg(v, w'), \\ g(av + bv', w) &= ag(v, w) + bg(v', w), \end{aligned}$$

qualunque siano $a, b \in K$, $v, v' \in V$ e $w, w' \in W$.
Un'applicazione bilineare $g\colon V \times W \to K$ si dice *non degenere*, se

$$\begin{aligned} g(v, w) = 0 \text{ per ogni } v \in V \quad &\Rightarrow \quad w = 0, \\ g(v, w) = 0 \text{ per ogni } w \in W \quad &\Rightarrow \quad v = 0. \end{aligned}$$

Osservazione

Sia V uno spazio vettoriale sul campo K. La dualità canonica $\circ\colon V^* \times V \to K$ è un'applicazione bilineare non degenere.

dim. Qualunque siano $a, b \in K$, $v, w \in V$ e $\xi, \eta \in V^*$, si ha

$$\xi \circ (av + bw) = \xi(av + bw) = a\xi(v) + b\xi(w) = a(\xi \circ v) + b(\xi \circ w),$$
$$(a\xi + b\eta) \circ v = a\xi(v) + b\eta(v) = a(\xi \circ v) + b(\eta \circ v),$$

la prima perché ξ è lineare, la seconda per la definizione di somma tra funzioni; per cui la dualità canonica è un'applicazione bilineare.
Inoltre, se $\xi \circ v = 0$ per ogni $v \in V$, allora $\xi \in \mathrm{Hom}_K(V, K)$ è l'applicazione nulla, ovvero $\xi = 0$. D'altra parte, se un vettore $v \in V$ è diverso dal vettore nullo, allora può essere inserito in una base e si può definire un'applicazione lineare attribuendo ad arbitrio i valori sugli elementi di una base. Dunque, se per un vettore v si ha $\xi \circ v = 0$ per ogni $\xi \in V^*$, ciò significa che v non può far parte di una base di V e quindi che $v = 0$; per cui la dualità canonica è non-degenere. $\square$

D'ora in poi lavoreremo solo con spazi vettoriali di dimensione finita su K.

Osservazione/Definizione

Sia V uno spazio vettoriale sul campo K e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una sua base. La *base duale* $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ di V^* è data dalle forme lineari soddisfacenti alle condizioni $v_i^* \circ v_j = \delta_{ij}$ per ogni $1 \le i, j \le n$.

dim. Le forme lineari $v_1^*, \dots, v_n^*$ esistono, perché, essendo elementi di $\mathrm{Hom}_K(V, K)$, basta definire i loro valori su una base di V e questi sono dati dalle condizioni $v_i^* \circ v_j = \delta_{ij}$. Poiché $\dim \mathrm{Hom}_K(V, K) = \dim V = n$ e sono date n forme lineari, basta vedere che sono linearmente indipendenti. Infatti, da $a_1 v_1^* + \dots + a_n v_n^* = 0_{V^*}$ e accoppiando col vettore v_1, dalla condizione $v_i^* \circ v_1 = \delta_{i1}$, si ricava

$$0 = 0_{V^*} \circ v_1 = a_1(v_1^* \circ v_1) + a_2(v_2^* \circ v_1) + \dots + a_n(v_n^* \circ v_1) = a_1.$$

Analogamente si verifica che $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ e quindi l'indipendenza lineare delle forme $v_1^*, \dots, v_n^*$, che sono perciò una base di V^*. $\square$

La base duale calcola le cordinate di un vettore $v \in V$ nella base $\mathcal{V}$.

Proposizione

Sia V uno spazio vettoriale sul campo K, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una sua base e $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ la base duale di V^*. Per ogni $v \in V$ si ha $v = \sum_{i=1}^{n} (v_i^* \circ v) v_i$.

dim. Per ogni $j = 1, \dots, n$, si ha

$$v_j^* \circ \left(v - \sum_{i=1}^{n} (v_i^* \circ v) v_i \right) = v_j^* \circ v - (v_j^* \circ v)(v_j^* \circ v_j) = 0.$$

Poiché la dualità è non degenere, si ha la tesi. □

Si noti che, se $\zeta = a_1 v_1^* + \cdots + a_n v_n^* \in V^*$, allora $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}_1}(\zeta) = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}$, ove $\mathcal{E}_1 = \{1\}$ è la base canonica di K come spazio vettoriale su sé stesso. Dunque, se $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$, allora

$$\boxed{\zeta \circ v = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n.}$$

L'ultima osservazione potrebbe suggerire l'idea di identificare lo spazio V col suo duale V^* associando ad una base $\mathcal{V}$ la sua base duale $\mathcal{V}^*$. Questa identificazione non è canonica perché le due basi hanno matrici di cambiamento di base diverse.

Proposizione

Siano V uno spazio vettoriale sul campo K, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$ basi di V e $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$, $\mathcal{W}^* = \{w_1^*, \dots, w_n^*\}$ le corrispondenti basi duali di V^*. Allora

$$\alpha_{\mathcal{V}^*,\mathcal{W}^*}(\mathrm{id}_{V^*}) = {}^t\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathrm{id}_V).$$

L'ultima osservazione potrebbe suggerire l'idea di identificare lo spazio V col suo duale V^* associando ad una base $\mathcal{V}$ la sua base duale $\mathcal{V}^*$. Questa identificazione non è canonica perché le due basi hanno matrici di cambiamento di base diverse.

Proposizione

Siano V uno spazio vettoriale sul campo K, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$ basi di V e $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$, $\mathcal{W}^* = \{w_1^*, \dots, w_n^*\}$ le corrispondenti basi duali di V^*. Allora

$$\alpha_{\mathcal{V}^*,\mathcal{W}^*}(\mathrm{id}_{V^*}) = {}^t\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathrm{id}_V).$$

dim. Siano $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathrm{id}_V) = P = (p_{ij})_{1\le i,j\le n}$ e $\alpha_{\mathcal{V}^*,\mathcal{W}^*}(\mathrm{id}_{V^*}) = Q = (q_{hk})_{1\le h,k\le n}$. Dunque si ha $w_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} v_i$ e $v_k^* = \sum_{h=1}^n q_{hk} w_h^*$. Dunque, calcolando $v_k^* \circ w_j$, si ricava

$$q_{jk} = \left(\sum_{h=1}^n q_{hk} w_h^*\right) \circ w_j = v_k^* \circ w_j = v_k^* \circ \left(\sum_{i=1}^n p_{ij} v_i\right) = p_{kj},$$

qualunque siano j e k; ovvero $Q = {}^tP$. □

Vi è però un modo canonico (cioè indipendente dalla scelta delle coordinate) di identificare lo spazio V con il duale del duale $V^{**} := \mathrm{Hom}_K(V^*, K)$. In questo modo il ruolo dei due spazi, V e V^*, nella dualità canonica diviene simmetrico.

Proposizione

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo K. Allora esiste un isomorfismo canonico $\phi\colon V \to \mathrm{Hom}_K(V^*, K)$, che al vettore $v \in V$ associa l'applicazione lineare $\varphi_v \in \mathrm{Hom}_K(V^*, K)$, definita ponendo $\varphi_v(\xi) = \xi \circ v = \xi(v)$, per ogni $\xi \in V^*$.

Proposizione

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo K. Allora esiste un isomorfismo canonico $\phi\colon V \to \mathrm{Hom}_K(V^*, K)$, che al vettore $v \in V$ associa l'applicazione lineare $\varphi_v \in \mathrm{Hom}_K(V^*, K)$, definita ponendo $\varphi_v(\xi) = \xi \circ v = \xi(v)$, per ogni $\xi \in V^*$.

dim. Poiché la dualità canonica $\circ\colon V^* \times V \to K$ è un'applicazione bilineare, si deduce che ϕ è un'applicazione lineare. Inoltre, poiché la dualità canonica è non-degenere, ne consegue che ϕ è iniettiva. Dunque l'applicazione $\phi\colon V \to \mathrm{Hom}_K(V^*, K)$ definita sopra è un omomorfismo iniettivo di spazi vettoriali. Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo K, come abbiamo già osservato, si ha

$$\dim_K \mathrm{Hom}_K(V, K) = \dim_K V \dim_K K = \dim_K V,$$

da cui si deduce che

$$\dim_K V^{**} = \dim_K V^* = \dim_K V$$

e quindi ϕ è un isomorfismo. $\square$

Proposizione

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo K. Allora esiste un isomorfismo canonico $\phi\colon V \to \mathrm{Hom}_K(V^*, K)$, che al vettore $v \in V$ associa l'applicazione lineare $\varphi_v \in \mathrm{Hom}_K(V^*, K)$, definita ponendo $\varphi_v(\xi) = \xi \circ v = \xi(v)$, per ogni $\xi \in V^*$.

dim. Poiché la dualità canonica $\circ\colon V^* \times V \to K$ è un'applicazione bilineare, si deduce che ϕ è un'applicazione lineare. Inoltre, poiché la dualità canonica è non-degenere, ne consegue che ϕ è iniettiva. Dunque l'applicazione $\phi\colon V \to \mathrm{Hom}_K(V^*, K)$ definita sopra è un omomorfismo iniettivo di spazi vettoriali. Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo K, come abbiamo già osservato, si ha

$$\dim_K \mathrm{Hom}_K(V, K) = \dim_K V \dim_K K = \dim_K V,$$

da cui si deduce che

$$\dim_K V^{**} = \dim_K V^* = \dim_K V$$

e quindi ϕ è un isomorfismo. □

Dall'identificazione stabilita sopra discende che la dualità canonica tra V^* e $V^{**} = \mathrm{Hom}_K(V^*, K)$ viene a coincidere con la dualità canonica tra V e V^*, a meno dell'ordine degli argomenti.

Dunque, d'ora in poi scriveremo indifferentemente $v^* \circ v$ o $v \circ v^*$ per indicare il valore della dualità canonica sulla coppia di vettori $v \in V$ e $v^* \in V^*$.

Ortogonali

Un'importante relazione lega i sottospazi di V a quelli del suo duale, V^*.

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale sul campo K e sia V^* il suo duale. Dato un sottoinsieme non vuoto S di V, il suo *ortogonale* è il sottoinsieme

$$S^\perp = \{\, \xi \in V^* \mid \xi \circ s = 0 \quad \forall s \in S \,\}.$$

Poiché i ruoli di V e V^* nella dualità canonica sono simmetrici, possiamo definire analogamente, in corrispondenza a $Z \subseteq V^*$, un ortogonale $Z^\perp \subseteq V$. Le relazioni tra sottospazi e ortogonali sono raccolte qui sotto.

Ortogonali

Un'importante relazione lega i sottospazi di V a quelli del suo duale, V^*.

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale sul campo K e sia V^* il suo duale. Dato un sottoinsieme non vuoto S di V, il suo *ortogonale* è il sottoinsieme

$$S^\perp = \{ \xi \in V^* \mid \xi \circ s = 0 \quad \forall s \in S \}.$$

Poiché i ruoli di V e V^* nella dualità canonica sono simmetrici, possiamo definire analogamente, in corrispondenza a $Z \subseteq V^*$, un ortogonale $Z^\perp \subseteq V$. Le relazioni tra sottospazi e ortogonali sono raccolte qui sotto.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo K e sia V^* il suo duale.

- Se S è un sottoinsieme di V, allora $S^\perp$ è un sottospazio di V^* e $S_1 \subseteq S_2 \;\Rightarrow\; S_2^\perp \subseteq S_1^\perp$.
- Se S è un sottoinsieme di V, allora $S^\perp = \langle S \rangle^\perp$.
- Se W è un sottospazio di V di dimensione k, allora $\dim W^\perp = n - k$.
- Se W è un sottospazio di V, allora $(W^\perp)^\perp = W$.
- Dati due sottospazi, U e W, si ha $(U+W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$ e $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.

dim. Procediamo nell'ordine

- Certamente $0 \in S^\perp$. Se ξ, η appartengono a $S^\perp$ e $a, b \in K$, allora, per la bilinearità della dualità canonica, dato un qualunque elemento $s \in S$, si ha $(a\xi + b\eta) \circ s = a(\xi \circ s) + b(\eta \circ s) = 0$ e quindi $S^\perp$ è un sottospazio. Le relazioni di inclusione sono immediate, perché una forma ortogonale a tutti i vettori di S_2 è ortogonale necessariamente ai vettori del sottoinsieme S_1.
- Poiché $S \subseteq \langle S \rangle$, dalla precedente discende $\langle S \rangle^\perp \subseteq S^\perp$. Viceversa, se $a_1 s_1 + \cdots + a_r s_r \in \langle S \rangle$ e $\zeta \in S^\perp$, allora $\zeta \circ (a_1 s_1 + \cdots + a_r s_r) = a_1(\zeta \circ s_1) + \cdots + a_r(\zeta \circ s_r) = 0$, da cui discende l'altra inclusione e quindi l'uguaglianza.
- Sia $\{v_1, \ldots, v_k\}$ una base di W e completiamola ad una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ di V. Indicata con $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ la base duale di V^*, si ha $\zeta = a_1 v_1^* + \cdots + a_n v_n^* \in W^\perp$ se, e solo se, $a_1 = \cdots = a_k = 0$. Dunque, $W^\perp = \left\langle v_{k+1}^*, \ldots, v_n^* \right\rangle$ ha dimensione $n - k$.
- Si ha $W \subseteq (W^\perp)^\perp$ e $\dim (W^\perp)^\perp = n - (\dim W^\perp) = n - (n - \dim W) = \dim W$ è conseguenza del punto precedente. Dunque i due sottospazi sono uguali.
- U e W sono contenuti in $U + W$, quindi per la prima osservazione $(U + W)^\perp \subseteq U^\perp \cap W^\perp$. Viceversa, l'altra inclusione si ha perché, se $\zeta \in U^\perp \cap W^\perp$ e $u + w \in U + W$, con $u \in U$ e $w \in W$, allora $\zeta \circ (u + w) = (\zeta \circ u) + (\zeta \circ w) = 0$.
  Infine, da $(U \cap W) \subseteq U$ e $(U \cap W) \subseteq W$ discende che $U^\perp + W^\perp \subseteq (U \cap W)^\perp$. Un calcolo di dimensioni permette di concludere, perché, per quanto visto sopra e la Formula di Grassmann, si ha

$$\begin{aligned}\dim (U^\perp + W^\perp) &= (n - \dim U) + (n - \dim W) - \dim (U^\perp \cap W^\perp) = \\ &= 2n - \dim U - \dim W - \dim (U + W)^\perp = \\ &= n - (\dim U + \dim W - \dim (U + W)) = \\ &= n - \dim (U \cap W) = \dim (U \cap W)^\perp.\end{aligned}$$

Con ciò tutte le proprietà sono dimostrate. □

La dualità canonica tra V e V^* induce dualità tra sottospazi dell'uno e *quozienti* dell'altro.

Proposizione

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su K e sia W un suo sottospazio. Allora

$$W^* \cong V^*/W^\perp \qquad \text{e} \qquad (V/W)^* \cong W^\perp,$$

ove $V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$, $W^* = \mathrm{Hom}_K(W, K)$, $(V/W)^* = \mathrm{Hom}_K(V/W, K)$ e $W^\perp = \{\, v^* \in V^* \mid v^* \circ w = 0, \ \forall w \in W \,\}$.

La dualità canonica tra V e V^* induce dualità tra sottospazi dell'uno e *quozienti* dell'altro.

Proposizione

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su K e sia W un suo sottospazio. Allora

$$W^* \cong V^*/W^\perp \qquad \text{e} \qquad (V/W)^* \cong W^\perp,$$

ove $V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$, $W^* = \mathrm{Hom}_K(W, K)$, $(V/W)^* = \mathrm{Hom}_K(V/W, K)$ e $W^\perp = \{\, v^* \in V^* \mid v^* \circ w = 0,\ \forall w \in W\,\}$.

dim. La restrizione al sottospazio W delle forme lineari su V induce un omomorfismo suriettivo $\mathrm{Hom}_K(V, K) \to \mathrm{Hom}_K(W, K)$ il cui nucleo è dato da $W^\perp$. L'isomorfismo $W^* \cong V^*/W^\perp$ si ottiene quindi applicando a questo caso il primo teorema di isomorfismo.
Per quanto riguarda l'isomorfismo $(V/W)^* \cong W^\perp$, basta osservare che una forma lineare $\zeta : V/W \to K$ composta con la proiezione canonica $p_W : V \to V/W$, determina una forma lineare $\zeta \circ p_W : V \to K$ che si annulla su W ed appartiene quindi al sottospazio $W^\perp$. L'applicazione $\mathrm{Hom}_K(V/W, K) \to W^\perp$ che manda ζ su $\zeta \circ p_W$ è un omomorfismo iniettivo e, con un calcolo di dimensioni, si conclude che è anche suriettivo, ovvero un isomorfismo. $\square$

Esempio : Si consideri lo spazio vettoriale V su $\mathbb{Q}$ e la sua base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$. Dati i sottospazi

$$U = \langle 2v_1 - v_3 + v_5, 3v_2 - v_3 - v_4 \rangle \quad \text{e} \quad W : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_5 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Si determini dimensione e base per ciascuno dei due sottospazi e si verifichi se $V = U \oplus W$.

(b) Si determinino dimensione, base ed equazioni cartesiane per $U^\perp$ e $W^\perp$ e si verifichi se $V^* = U^\perp \oplus W^\perp$.

Esempio : Si consideri lo spazio vettoriale V su $\mathbb{Q}$ e la sua base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$. Dati i sottospazi

$$U = \langle 2v_1 - v_3 + v_5, 3v_2 - v_3 - v_4 \rangle \quad \text{e} \quad W : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_5 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Si determini dimensione e base per ciascuno dei due sottospazi e si verifichi se $V = U \oplus W$.

(b) Si determinino dimensione, base ed equazioni cartesiane per $U^\perp$ e $W^\perp$ e si verifichi se $V^* = U^\perp \oplus W^\perp$.

Svolg.: (*a*) I due generatori di U sono linearmente indipendenti e quindi una base del sottospazio, che ha perciò dimensione 2. Per il Teorema di Rouché- Capelli, $\dim W = 3$ (soluzione di un sistema lineare di rango 2) e una base è data dai vettori $v_1 - v_2$, $v_2 + v_5$, $2v_3 + v_4$. Sostituendo una combinazione lineare delle coordinate dei generatori di U nelle equazioni che definiscono W, si vede subito che $U \cap W = \langle 0 \rangle$, quindi i due spazi sono in somma diretta e la somma ha dimensione 5; ovvero $V = U \oplus W$.

(*b*) Per le proprietà degli ortogonali, $\dim U^\perp = 3$ e, riferendo le coordinate in V^* alla base duale $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_5^*\}$ della base $\mathcal{V}$, si ha che $y_1 v_1^* + \cdots + y_5 v_5^* \in U^\perp$ se, e solo se, $\begin{cases} 2y_1 - y_3 + y_5 = 0 \\ 3y_2 - y_3 - y_4 = 0 \end{cases}$. Una base di $U^\perp$ è data da $3v_1^* + 2v_2^* + 6v_3^*$, $v_2^* + 3v_4^*$, $v_1^* - 2v_5^*$. Per quanto riguarda $W^\perp$, $\dim W^\perp = 2$, una base è data da $v_1^* + v_2^* - v_5^*$, $v_3^* - 2v_4^* = 0$ e equazioni cartesiane sono

$$\begin{cases} y_1 - y_2 = 0 \\ y_2 + y_5 = 0 \\ 2y_3 + y_4 = 0 \end{cases}.$$

Infine, $U^\perp \cap W^\perp = (U + W)^\perp = \langle 0 \rangle$ e $U^\perp + W^\perp = (U \cap W)^\perp = V^*$, ovvero $V^* = U^\perp \oplus W^\perp$. □

Applicazione lineare trasposta

Proposizione

Siano dati due spazi vettoriali V e W e un omomorfismo $\phi \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Allora esiste un'unica applicazione lineare $\phi^* \colon W^* \to V^*$, legata a ϕ dalle relazioni $v \circ \phi^*(w^*) = \phi(v) \circ w^*$, per ogni $v \in V$ e $w^* \in W^*$.

dim. Dalle relazioni $v \circ \phi^*(w^*) = \phi(v) \circ w^*$ discende che, fissato $w^* \in W^*$, l'elemento $\phi^*(w^*) \in \mathrm{Hom}_K(V, K)$ è l'applicazione composta $w^* \circ \phi$, ovvero l'unica applicazione che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\phi^*(w^*)"'] & W \arrow[d, "w^*"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Infatti, qualunque sia il vettore $v \in V$, si ha $\phi^*(w^*)(v) = v \circ \phi^*(w^*) = \phi(v) \circ w^* = w^*(\phi(v))$, e ciò permette di concludere. $\square$

Definizione

L'applicazione lineare $\phi^* \colon W^* \to V^*$ definita sopra è detta la *trasposta* dell'applicazione lineare $\phi \colon V \to W$.

Si osservi che la trasposizione inverte l'ordine con cui si compongono gli omomorfismi, ovvero $(\phi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \phi^*$. Inoltre, $\mathrm{id}_V^* = \mathrm{id}_{V^*}$. Se gli spazi vettoriali hanno dimensione finita si ha l'isomorfismo col biduale e $\phi^{**} = \phi$.

Proposizione

Siano dati due spazi vettoriali V e W di dimensione finita su K e un omomorfismo $\phi \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Indicata con $\phi^* \in \mathrm{Hom}_K(W^*, V^*)$ la trasposta di ϕ, si ha

$$\ker(\phi^*) = (\operatorname{im}\phi)^\perp \qquad \text{e} \qquad \operatorname{im}(\phi^*) = (\ker\phi)^\perp.$$

Si osservi che la trasposizione inverte l'ordine con cui si compongono gli omomorfismi, ovvero $(\phi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \phi^*$. Inoltre, $\mathrm{id}_V^* = \mathrm{id}_{V^*}$. Se gli spazi vettoriali hanno dimensione finita si ha l'isomorfismo col biduale e $\phi^{**} = \phi$.

Proposizione

Siano dati due spazi vettoriali V e W di dimensione finita su K e un omomorfismo $\phi \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Indicata con $\phi^* \in \mathrm{Hom}_K(W^*, V^*)$ la trasposta di ϕ, si ha

$$\ker(\phi^*) = (\mathrm{im}\,\phi)^\perp \qquad \text{e} \qquad \mathrm{im}\,(\phi^*) = (\ker\phi)^\perp.$$

dim. Si ha $x^* \in \ker(\phi^*) \iff \phi^*(x^*) \circ v = 0\, \forall v \in V \iff x^* \circ \phi(v) = 0\, \forall v \in V \iff x^* \in (\mathrm{im}\,\phi)^\perp$.
Per quanto riguarda la seconda uguaglianza, se $y^* = \phi^*(x^*)$, allora, dato $v \in \ker\phi$, si ha

$$y^* \circ v = \phi^*(x^*) \circ v = x^* \circ \phi(v) = 0,$$

da cui si deduce che $\mathrm{im}\,(\phi^*) \subseteq (\ker\phi)^\perp$ e l'uguaglianza discende da un calcolo di dimensioni, ovvero

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{im}\,\phi^*) &= \dim W^* - \dim(\ker\phi^*) = \dim W - \dim(\mathrm{im}\,\phi)^\perp = \\ &= \dim \mathrm{im}\,\phi = \dim V - \dim(\ker\phi) = \dim(\ker\phi)^\perp \end{aligned}$$

che conclude la dimostrazione. □

Identificare uno spazio vettoriale con il duale (proprio o di un altro spazio) è equivalente a dare un'applicazione bilineare non-degenere. Precisamente

Proposizione

Siano V e W due K-spazi vettoriali di dimensione finita. Dare un'applicazione bilineare non-degenere $g\colon V \times W \to K$ equivale a dare un isomorfismo $\Phi_g\colon W \to V^*$, ovvero l'isomorfismo trasposto $\Phi_g^*\colon V \to W^*$.

Identificare uno spazio vettoriale con il duale (proprio o di un altro spazio) è equivalente a dare un'applicazione bilineare non-degenere. Precisamente

Proposizione

Siano V e W due K-spazi vettoriali di dimensione finita. Dare un'applicazione bilineare non-degenere $g\colon V \times W \to K$ equivale a dare un isomorfismo $\Phi_g\colon W \to V^*$, ovvero l'isomorfismo trasposto $\Phi_g^*\colon V \to W^*$.

dim. È chiaro che, dato un isomorfismo $\Phi\colon W \to V^*$, si ha l'applicazione bilineare non-degenere, definita ponendo $g(v, w) := v \circ \Phi(w)$, per ogni $v \in V$ e $w \in W$.
Viceversa, sia data $g : V \times W \to K$, bilineare e non-degenere, e si consideri l'applicazione $\Phi_g : W \to V^*$ che associa al vettore $w \in W$, l'applicazione $v \mapsto g(v, w)$, al variare di v in V. L'applicazione è un omomorfismo e l'unico vettore di W che viene trasformato da Φ_g nello zero di V^* è lo zero di W e quindi $\Phi_g : W \to V^*$ è un omomorfismo iniettivo. Ciò implica, in particolare, $\dim_K W \leq \dim_K V^* = \dim_K V$.
Analoghe considerazioni si possono fare per l'applicazione $\Psi_g : V \to W^*$ che associa al vettore $v \in V$, l'applicazione lineare $w \mapsto g(v, w)$. Dunque $\Psi_g : V \to W^*$ è un omomorfismo iniettivo e, per lo stesso motivo, si ha la disuguaglianza $\dim_K V \leq \dim_K W^* = \dim_K W$. Mettendo insieme le due disuguaglianze, si conclude che $\dim_K V = \dim_K W$ e quindi che $\Phi_g : W \to V^*$ e $\Psi_g : V \to W^*$ sono due isomorfismi.
Si può facilmente verificare che i due isomorfismi sono l'uno il trasposto dell'altro; infatti, per ogni $v \in V$ e ogni $w \in W$, si ha $\Psi_g(v) \circ w = g(v, w) = v \circ \Phi_g(w) = \Phi_g^*(v) \circ w$; ovvero $\Psi_g = \Phi_g^*$. $\square$

Identificare uno spazio vettoriale con il duale (proprio o di un altro spazio) è equivalente a dare un'applicazione bilineare non-degenere. Precisamente

Proposizione

Siano V e W due K-spazi vettoriali di dimensione finita. Dare un'applicazione bilineare non-degenere $g\colon V \times W \to K$ equivale a dare un isomorfismo $\Phi_g\colon W \to V^*$, ovvero l'isomorfismo trasposto $\Phi_g^*\colon V \to W^*$.

dim. È chiaro che, dato un isomorfismo $\Phi\colon W \to V^*$, si ha l'applicazione bilineare non-degenere, definita ponendo $g(v, w) := v \circ \Phi(w)$, per ogni $v \in V$ e $w \in W$.
Viceversa, sia data $g : V \times W \to K$, bilineare e non-degenere, e si consideri l'applicazione $\Phi_g : W \to V^*$ che associa al vettore $w \in W$, l'applicazione $v \mapsto g(v, w)$, al variare di v in V. L'applicazione è un omomorfismo e l'unico vettore di W che viene trasformato da Φ_g nello zero di V^* è lo zero di W e quindi $\Phi_g : W \to V^*$ è un omomorfismo iniettivo. Ciò implica, in particolare, $\dim_K W \leq \dim_K V^* = \dim_K V$.
Analoghe considerazioni si possono fare per l'applicazione $\Psi_g : V \to W^*$ che associa al vettore $v \in V$, l'applicazione lineare $w \mapsto g(v, w)$. Dunque $\Psi_g : V \to W^*$ è un omomorfismo iniettivo e, per lo stesso motivo, si ha la disuguaglianza $\dim_K V \leq \dim_K W^* = \dim_K W$. Mettendo insieme le due disuguaglianze, si conclude che $\dim_K V = \dim_K W$ e quindi che $\Phi_g : W \to V^*$ e $\Psi_g : V \to W^*$ sono due isomorfismi.
Si può facilmente verificare che i due isomorfismi sono l'uno il trasposto dell'altro; infatti, per ogni $v \in V$ e ogni $w \in W$, si ha $\Psi_g(v) \circ w = g(v, w) = v \circ \Phi_g(w) = \Phi_g^*(v) \circ w$; ovvero $\Psi_g = \Phi_g^*$. □

Sarà il prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$, definito da $(x, y) \mapsto {}^t x y$ per $x, y \in \mathbb{R}^n$, che darà l'isomorfismo tra $\mathbb{R}^n$ e lo spazio duale che determina la struttura metrica dello spazio euclideo, come si vedrà nella seonda parte del corso.

Cenni al prodotto tensoriale

Definizione

Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita su K e $w \in W$, $\zeta \in V^*$. Si chiama *prodotto tensoriale* tra il vettore w e la forma lineare ζ l'applicazione lineare $w \otimes \zeta : V \to W$, definita da $v \mapsto w(\zeta \circ v)$.

Cenni al prodotto tensoriale

Definizione

Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita su K e $w \in W$, $\zeta \in V^*$. Si chiama *prodotto tensoriale* tra il vettore w e la forma lineare ζ l'applicazione lineare $w \otimes \zeta : V \to W$, definita da $v \mapsto w(\zeta \circ v)$.

Osserviamo che

- $\mathrm{im}\,(w \otimes \zeta) \subseteq \langle w \rangle$ e vale l'uguaglianza se $\zeta \neq 0$.
- $\langle \zeta \rangle^{\perp} \subseteq \ker\,(w \otimes \zeta)$ e vale l'uguaglianza se $w \neq 0$.
- $(w + w') \otimes \zeta = w \otimes \zeta + w' \otimes \zeta$, $w \otimes (\zeta + \zeta') = w \otimes \zeta + w \otimes \zeta'$ e $(aw) \otimes \zeta = a(w \otimes \zeta) = w \otimes (a\zeta)$, per ogni $w, w' \in W$, $\zeta, \zeta' \in V^*$, $a \in K$.
- Se $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è base di V, $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ la corrispondente base duale di V^* e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ base di W, allora $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(w_i \otimes v_j^*) = \varepsilon(i,j)$ della base canonica di $M_{m \times n}(K)$.

Indicato con $W \otimes_K V^*$ il sottospazio di $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ generato dai prodotti tensoriali $w \otimes \zeta$, per $w \in W$ e $\zeta \in V^*$, si ha $W \otimes_K V^* = \mathrm{Hom}_K(V, W)$.

Dunque, ogni elemento ϕ di $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ si scrive come $\phi = \sum_{i=1}^{k} w_i \otimes \zeta_i$, per opportuni $w_i \in W$, $\zeta_i \in V^*$.

La scrittura non è unica e si ha

- $\mathrm{im}\, \phi \subseteq \langle w_1, \dots, w_k \rangle$ e vale l'uguaglianza se $\zeta_1, \dots, \zeta_k$ sono linearmente indipendenti.
- $\langle \zeta_1, \dots, \zeta_k \rangle^{\perp} \subseteq \ker \phi$ e vale l'uguaglianza se $w_1, \dots, w_k$ sono linearmente indipendenti.
- $\mathrm{rk}\, \phi$ è il minimo k per cui ϕ si può scrivere come somma di k prodotti tensoriali.

Dunque, ogni elemento ϕ di $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ si scrive come $\phi = \sum_{i=1}^{k} w_i \otimes \zeta_i$, per opportuni $w_i \in W$, $\zeta_i \in V^*$.

La scrittura non è unica e si ha

- $\mathrm{im}\ \phi \subseteq \langle w_1, \dots, w_k \rangle$ e vale l'uguaglianza se $\zeta_1, \dots, \zeta_k$ sono linearmente indipendenti.
- $\langle \zeta_1, \dots, \zeta_k \rangle^\perp \subseteq \ker \phi$ e vale l'uguaglianza se $w_1, \dots, w_k$ sono linearmente indipendenti.
- $\mathrm{rk}\ \phi$ è il minimo k per cui ϕ si può scrivere come somma di k prodotti tensoriali.

Esempio : Siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ basi di V e W e $\phi : V \to W$ di matrice $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi) = PQ$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & -10 & 4 & 0 & -2 \\ -2 & -4 & 2 & 10 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dunque $\mathrm{rk}\ \phi = \mathrm{rk}\ A = 3$. In particolare, Q ha le righe non nulle della matrice a scala ridotta, riga-equivalente ad A, e le colonne di P sono le colonne di A corrispondenti ai pivot di Q. Le colonne di P sono quindi le coordinate in base $\mathcal{W}$ dei vettori $u_1 = \phi(v_1)$, $u_2 = \phi(v_3)$, $u_3 = \phi(v_6)$. Le righe di Q sono le coordinate in base $\mathcal{V}^*$ delle forme lineari $\zeta_1 = v_1^* + 2v_2^* - 2v_4^* + v_5^* - v_7^*$, $\zeta_2 = v_3^* + 3v_4^* - v_5^*$, $\zeta_3 = v_6^* - 2v_7^*$, e si ha

$$\phi = u_1 \otimes \zeta_1 + u_2 \otimes \zeta_2 + u_3 \otimes \zeta_3.$$

In particolare, le forme $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ sono la base di $(\ker \phi)^\perp \cong (V/\ker \phi)^*$, duale della base $v_1 + \ker \phi$, $v_3 + \ker \phi$, $v_6 + \ker \phi$ dello spazio quoziente $V/\ker \phi$.