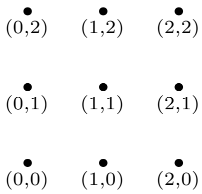
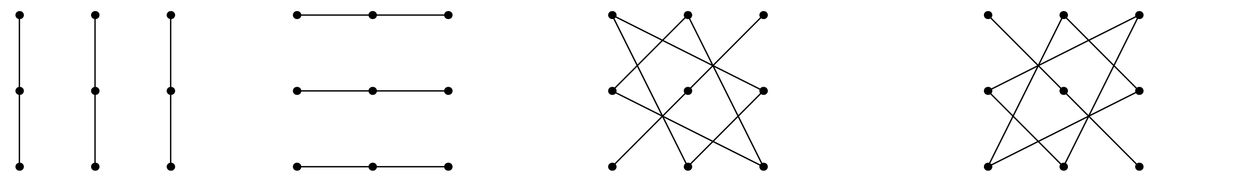
Due chiacchere sul piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$

Abbiamo visto che è possibile costruire uno spazio affine a partire da qualsiasi spazio vettoriale. Ad esempio, prendendo il campo con due elementi, $\mathbb{F}_2$, si ha una retta con due soli punti $\mathbb{A}^1(\mathbb{F}_2)$; ed un piano, $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_2)$, che contiene 4 punti e 6 rette (provare a disegnarselo). In un tale spazio affine però mancano molti elementi a cui siamo abituati a pensare, ad esempio non esiste il punto medio tra due punti (perché 2 non è invertibile nel campo).

La retta su $\mathbb{F}_3$ ha tre punti, in corrspondenza con gli elementi $\{0, 1, 2\}$ del campo. Il piano affine su $\mathbb{F}_3$ ha quindi 9 punti che possiamo disporre come nel disegno qui a fianco. In generale lo spazio $\mathbb{A}^n(\mathbb{F}_q)$ ha q^n punti. Nel piano $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$ ci sono esattamente quattro direzioni distinte (i sottospazi di dimensione 1 di $\mathbb{F}_3^2$) ed ogni fascio di rette parallele (si veda il disegno qui sotto) contiene esattamente 3 rette (Abbiamo già visto che c'è corrispondenza biunivoca tra i punti di una retta e le rette di un fascio di parallele). Si poteva usare un altro modo per contare le rette di un piano affine. Le rette del piano $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_q)$ sono in corrispondenza con i polinomi di grado 1, $ax+by+c$. a coefficienti in $\mathbb{F}_q$, che sono $q^3 - q$ (bisogna escludere il caso $a = 0 = b$ che non ci dà una retta), ma a meno di un fattore di proporzionalità non nullo (se moltiplico tutti i coefficienti per uno stesso fattore non nullo, ottengo un polinomio diverso, ma che rappresenta la stessa retta). Quindi le rette di $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_q)$ sono $\frac{q^3-q}{q-1} = q(q + 1)$ (contare gli iperpiani di $\mathbb{A}^n(\mathbb{F}_q)$ per esercizio). Si osservi che, se aggiungessimo ad ogni retta del piano affine la sua direzione, come fosse un ulteriore punto, le rette verrebbero ad avere $q + 1$ punti ciascuna, ed avremmo aggiunto al piano ulteriori $q + 1$ punti a formare una ulteriore retta. In questo modo sia i punti che e le rette di questo "piano esteso" diverrebbero $q^2 + q + 1$, dando una maggiore "simmetria" tra i due enti.

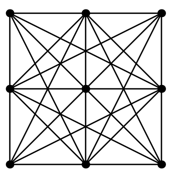




$x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ $\quad$ $y = 0$, $y = 1$, $y = 2$ $\quad$ $y = x$, $y = x + 1$, $y = x + 2$ $\quad$ $y = 2x$, $y = 2x + 1$, $y = 2x + 2$

Per rendere evidente l'allineamento dei vari punti abbiamo tracciato le linee che congiungono le terne di punti allineati, ma le rette del piano affine sono gli insiemi costituiti dai tre punti e quelle linee hanno solo un utilità mnemonica. Aver evidenziato le rette, mette in evidenza il fatto che nel piano $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$ (come in ogni piano che si rispetti) ci sono terne di punti non allineati, ovvero dei triangoli (si potrebbe contarli?). Si veda il disegno qui sotto per una visione d'insieme dei punti e delle rette del piano $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$.

È facile verificare (ad esempio usando combinazioni baricentriche) che in ogni retta di $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$ un punto è il punto medio degli altri due. Ad esempio, presa la retta $y = x + 1$, costituita dai punti $P = \binom{0}{1}$, $Q = \binom{1}{2}$,



$R = \binom{2}{0}$, il punto medio dei punti P e Q è $\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q = R$ (si ricordi che in $\mathbb{F}_3$ si ha $2 \cdot 2 = 1$ e quindi che $\frac{1}{2} = 2$), ed analogamente P è il punto medio tra Q ed R e Q è il punto medio tra P ed R (il lettore è invitato a fare una dimostrazione che ciò accade per i punti di una generica retta). Se ora consideriamo i punti $A = \binom{0}{1}$, $B = \binom{0}{2}$, $C = \binom{1}{2}$, che sono i vertici di un triangolo del piano $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$, possiamo osservare che le mediane del triangolo (le rette che congiungono un vertice con il punto medio del lato opposto) sono esattamente le tre rette parallele $y = 2x$, $y = 2x + 1$, $y = 2x + 2$ (si veda il disegno sopra). Infatti i tre punti medi dei lati di un triangolo soddisfano al teorema di Ceva e quindi le tre mediane devono essere parallele o concorrere ad uno stesso punto (il baricentro del triangolo). Quest'ultimo fatto è impossibile, perché in un piano affine, il baricentro del triangolo ABC avrebbe coordinate baricentriche $\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$, ma nel campo $\mathbb{F}_3$, $3 = 0$ e non può quindi essere invertibile.

Lasciamo al lettore il compito di indagare su altre particolarità di questo piano (...o di altri piani su campi finiti).