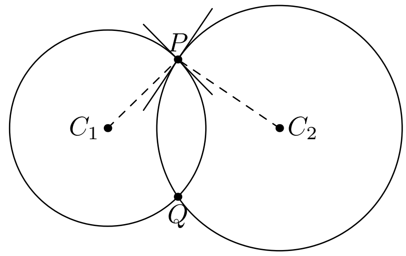
Trasformazioni di Möbius ed angoli

Vogliamo dare una dimostrazione del fatto che *le trasformazioni di Möbius conservano gli angoli*. Ovvero che, se due cerchi formano un angolo α anche le loro immagini tramite una trasformazione di Möbius formano lo stesso angolo.



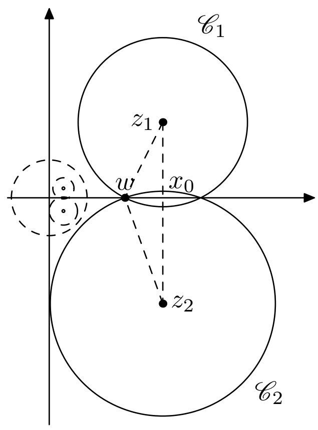
Per prima cosa quindi, dobbiamo chiarire cosa significa misurare l'angolo tra due cerchi. Dati due cerchi incidenti, come nella figura a fianco, prendiamo come *angolo tra i due cerchi* l'angolo formato dalle due tangenti nel punto di intersezione, P (che coincide con l'angolo tra le due tangenti in Q per simmetria rispetto alla retta che congiunge i due centri).

Ricordando che in un cerchio il raggio in P è perpendicolare alla tangente in P, possiamo ugualmente misurare l'angolo tra i due raggi C_1P e C_2P.

Per misurare gli angoli tra vettori nel piano complesso, possiamo utilizzare la seguente osservazione. Dati due numeri complessi non nulli, $z = re^{i\alpha}$ e $w = se^{i\beta}$, con $r, s \in (0, +\infty)$ ed $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si ha $\bar{z}w = rse^{\beta-\alpha} = rs(\cos(\beta-\alpha) + i\sin(\beta-\alpha)))$. Ovvero l'angolo tra i due vettori z e w, ovvero $\beta - \alpha$, è individuato da parte reale e parte immaginaria del numero complesso $\bar{z}w$ (in particolare, $|\Im(\bar{z}w)|$ è la misura dell'area del parallelogramma di lati z e w; spiegare il perché).

Possiamo quindi concludere che, *dati due cerchi nel piano di Gauss, $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$, di centri z_1 e z_2, che si intersecano nel punto w ($z_1, z_2, w \in \mathbb{C}$); l'angolo ϑ tra le due circonferenze è determinato dalle condizioni*

$$\cos\vartheta = \frac{\Re(\overline{(z_1 - w)}(z_2 - w))}{|z_1 - w||z_2 - w|} \qquad \text{e} \qquad \sin\vartheta = \frac{\Im(\overline{(z_1 - w)}(z_2 - w))}{|z_1 - w||z_2 - w|}.$$



Torniamo al problema iniziale, ricordando che le trasformazioni di Möbius si ottengono componendo traslazioni, rotazioni, dilatazioni, riflassioni su rette e riflessioni su cerchi. Le prime quattro classi conservano gli angoli; è quindi sufficiente dimostrare che anche le riflessioni su cerchi conservano gli angoli e in particolare è sufficiente dimostrarlo per la riflessione nel cerchio unitario: $\lambda(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ (perché? …dare una spiegazione convincente).

Siano date quindi due circonferenze, $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$, che si intersecano in due punti distinti. A meno di ruotare la figura attorno all'origine, possiamo supporre che i due punti si trovino sull'asse reale e siano precisamente $x_0 + h$ e $w = x_0 - h$, ove $x_0 \in \mathbb{R}$ è il punto medio tra i due e $2h \in \mathbb{R}_{>0}$ è la distanza tra i due punti. I centri dei due cerchi sono i punti $z_1 = x_0 + iy_1$ e $z_2 = x_0 + iy_2$, ed i raggi sono $r_k = \sqrt{h^2 + y_k^2}$, per $k = 1, 2$ (si faccia riferimento alla figura qui a fianco). L'angolo formato dai due cerchi è quindi determinato dal numero complesso $\frac{\overline{(z_1-w)}(z_2-w)}{|z_1-w||z_2-w|}$

Supponiamo che i due punti di intersezione delle circonferenze siano entrambi diversi da 0; dunque, le equazioni delle circonferenze e delle loro riflesse nel cerchio unitario sono

$$\bar{z}z - z_k\bar{z} - \bar{z}_k z + x_0^2 - h^2, \quad \text{e} \quad \bar{z}z - \frac{z_k}{x_0^2 - h^2}\bar{z} - \frac{\bar{z}_k}{x_0^2 - h^2}z + \frac{1}{x_0^2 - h^2}, \qquad \text{per } k = 1, 2.$$

I punti di intersezione delle circonferenze riflesse sono $w' = \frac{1}{x_0+h} = \frac{x_0-h}{x_0^2-h^2}$ ed $\frac{1}{x_0-h}$. I centri delle circonferenze riflesse sono $z'_k = \frac{z_k}{x_0^2-h^2}$, per $k = 1, 2$ (…e non sono il riflesso dei centri di $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$). Quindi l'angolo tra le circonferenze riflesse è determinato dal numero complesso

$$\frac{\overline{(z'_1 - w')}(z'_2 - w')}{|z'_1 - w'||z'_2 - w'|} = \frac{\overline{(z_1 - w)}(z_2 - w)}{|z_1 - w||z_2 - w|}.$$

Resta da verificare il caso in cui le due circonferenze si intersechino nell'origine ($x_0 = \pm h$) e vengano quindi trasformate nelle rette $z_k\bar{z} + \bar{z}_k z - 1 = 0$ ($k = 1, 2$). Le rette sono parallele, rispettivamente, ai vettori iz_k (darsi una spiegazione convincente di questo fatto!) e quindi formano un angolo corrispondente al numero complesso $\frac{\overline{z_1}z_2}{|z_1||z_2|}$ che coincide con l'angolo tra i due cerchi, visto che possiamo prendere $w = 0$ nella formula scritta sopra.

Abbiamo quindi verificato che la riflessione rispetto al cerchio unitario conserva gli angoli e quindi che tutte le trasformazioni di Möbius conservano gli angoli tra i cerchi del piano di Gauss.