Combinazioni baricentriche

Cominciamo con le definizioni.

Definizione. Siano dati i punti $P_0, \dots, P_k$ di uno spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$ sul campo C. Dati comunque $a_0, \dots, a_k$ in C, con $a_0 + \dots + a_k = 1$, è ben definito il punto

$$X = a_0P_0 + \dots + a_kP_k := O + a_0(P_0 - O) + \dots + a_k(P_k - O),$$

ove O è un arbitrario punto di $\mathbb{A}^{(\dagger)}$. In particolare, si ha $X = P_0 + a_1(P_1 - P_0) + \dots + a_k(P_k - P_0)$, da cui si vede che X appartiene alla sottovarietà lineare $P_0 \vee \dots \vee P_k$ e che tutti i punti di quella varietà si possono scrivere in questo modo. Inoltre, se i punti $P_0, \dots, P_k$ sono in posizione generale, allora vi è corrispondenza biunivoca tra punti X di $P_0 \vee \dots \vee P_k$ e $(k+1)$-uple $(a_0, \dots, a_k)$ con $a_0 + \dots + a_k = 1$. In tal caso si parla di *coordinate baricentriche* del punto X rispetto a $P_0, \dots, P_k$.

È un facile esercizio, verificare che, per ogni applicazione affine, f, si ha $f(a_0P_0 + \dots + a_kP_k) = a_0f(P_0) + \dots + a_kf(P_k)$ per ogni *combinazione baricentrica* $a_0P_0 + \dots + a_kP_k$ (ove $a_0 + \dots + a_k = 1$). Anzi, si può dimostrare che, un'applicazione tra spazi affini che rispetti le combinazioni baricentriche è un'applicazione affine.

Si può dare un'analoga descrizione "baricentrica" per i vettori dello spazio affine.

Definizione. Siano dati i punti $P_0, \dots, P_k$ di uno spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$ sul campo C. Dati comunque $u_0, \dots, u_k$ in C, con $u_0 + \dots + u_k = 0$, è ben definito il vettore

$$u = u_0P_0 + \dots + u_kP_k := u_0(P_0 - O) + \dots + u_k(P_k - O),$$

ove O è un arbitrario punto di $\mathbb{A}$. In particolare, si ha $u = u_1(P_1 - P_0) + \dots + u_k(P_k - P_0)$, da cui si vede che u appartiene al sottospazio direttore, $\langle P_1 - P_0, \dots, P_k - P_0 \rangle$, della varietà lineare $P_0 \vee \dots \vee P_k$ e che tutti i vettori di quel sottospazio si possono scrivere in questo modo. Inoltre, se i punti $P_0, \dots, P_k$ sono in posizione generale, allora vi è corrispondenza biunivoca tra vettori u di $\langle P_1 - P_0, \dots, P_k - P_0 \rangle$ e $(k+1)$-uple $(u_0, \dots, u_k)$ con $u_0 + \dots + u_k = 0$. In tal caso si parla di *coordinate baricentriche* del vettore u.

Naturalmente, se $X = a_0P_0 + \dots + a_kP_k$ è un punto ($a_0 + \dots + a_k = 1$) e $u = u_0P_0 + \dots + u_kP_k$ è un vettore ($u_0 + \dots + u_k = 0$), allora si ha $X + u = (a_0 + u_0)P_0 + \dots + (a_k + u_k)P_k$.

Si può verificare che, per ogni applicazione affine, f, si ha $\phi(u_0P_0 + \dots + u_kP_k) = u_0f(P_0) + \dots + u_kf(P_k)$, ove si indichi con ϕ l'applicazione lineare associata ad f, ovvero $v \mapsto f(P + v) - f(P)$ (per un qualsiasi punto P dello spazio).

Esercizio 1. Siano $P_0, P_1, \dots, P_k$ punti di uno spazio affine sul campo C. Verificare che una combinazione baricentrica di combinazioni baricentriche di $P_0, \dots, P_k$ è ancora una combinazione baricentrica di $P_0, \dots, P_k$. $\square$

Esercizio 2. Siano $P_0, P_1, \dots, P_k$ punti in posizione generale in uno spazio affine sul campo C e indichiamo con $\mathbb{L}$ la sottovarietà lineare $P_0 \vee P_1 \vee \dots \vee P_k$. Sia $v_i = P_i - P_0$, per $i = 1, \dots, k$. Si verifichi che $\mathscr{P} = \{P_0, v_1, \dots, v_k\}$ è un riferimento su $\mathbb{L}$ e si mostri che relazioni ci sono tra le coordinate di un punto X (risp. di un vettore u) in questo riferimento e le coordinate baricentriche rispetto a $P_0, P_1, \dots, P_k$. $\square$

Esercizio 3. Nelle notazioni dell'esercizio precedente, ad un punto P di $\mathbb{L}$ possiamo quindi associare le coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in C^{k+1}$ nel riferimento $\mathscr{P}$ e le coordinate baricentriche $\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix} \in C^{k+1}$ rispetto a $P_0, P_1, \dots, P_k$ (ovvero $P = p_0P_0 + \dots + p_kP_k$).

(†) La definizione del punto X non dipende dalla scelta di O, infatti, se O' è un altro punto di $\mathbb{A}$, si ha

$$\big(O + a_0(P_0 - O) + \dots + a_k(P_k - O)\big) - \big(O' + a_0(P_0 - O') + \dots + a_k(P_k - O')\big) = (O - O') + (a_0 + \dots + a_k)(O' - O) = 0,$$

ove si è usata l'identità $(P_j - O) - (P_j - O') = O' - O$, per $j = 0, \dots, k$.

Si mostri che l'insieme delle coordinate nel riferimento $\mathscr{P}$ dei punti di $\mathbb{L}$ è un iperpiano di $\mathbb{A}(C^{k+1})$. Si mostri che l'insieme delle coordinate baricentriche rispetto a $P_0, P_1, \dots, P_k$ dei punti di $\mathbb{L}$ è un iperpiano di $\mathbb{A}(C^{k+1})$. Si mostri che il 'cambiamento di coordinate' è un'applicazione affine tra i due iperpiani. È la restrizione di un'applicazione affine di $\mathbb{A}(C^{k+1})$ in sé? □

Poniamoci ora in un piano affine sul campo C e mostriamo come si possano trovare equazioni per le rette del piano anche in coordinate baricentriche (il lettore interessato può generalizzare a dimensioni maggiori. Il lettore più attento può trovare una corrispondenza con le equazioni nelle coordinate 'usuali'). In uno spazio affine, $(\mathbb{A}, V, +)$, fissiamo quindi tre punti in posizione generale, P_0, P_1, P_2, ed utilizziamo nel piano $P_0 \vee P_1 \vee P_2$ coordinate baricentriche riferite a questa terna di punti. Dati due punti (distinti) P e Q del piano, siano

$$P = p_0P_0 + p_1P_1 + p_2P_2, \qquad \text{e} \qquad Q = q_0P_0 + q_1P_1 + q_2P_2,$$

con $p_0 + p_1 + p_2 = 1 = q_0 + q_1 + q_2$. Possiamo pensare a queste terne di coordinate come ad elementi di C^3 e l'applicazione $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_0 + x_1 + x_2$ è una forma lineare su C^3, che indicheremo con $\varepsilon = (1, 1, 1)$. Le due terne $p = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ e $q = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ non sono proporzionali ($P \neq Q$) e generano quindi un sottospazio di dimensione 2 di C^3; per cui si ha

$$\langle (c_0, c_1, c_2) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right\rangle^{\perp}$$

ove $c = (c_0, c_1, c_2) \notin \langle \varepsilon \rangle$ è determinata a meno della moltiplicazione per una costante non nulla. Possiamo quindi affermare che le coordinate baricentriche $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ di un punto della retta $P \vee Q$ sono tutte e sole le terne $x \in C^3$ che sono soluzioni del sistema lineare

$$\boxed{\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 = 1 \\ c_0x_0 + c_1x_1 + c_2x_2 = 0 \end{cases}} \qquad \begin{pmatrix} \text{equazioni della retta } P \vee Q \\ \text{in coordinate baricentriche} \end{pmatrix}.$$

Infatti, se un punto $X = x_0P_0 + x_1P_1 + x_2P_2$ appartiene alla retta $P \vee Q$, le sue coordinate baricentriche sono $x = (1 - a)p + aq$, per qualche $a \in C$; e quindi soddisfano ad entrambo le equazioni. Viceversa, se una terna, x, soddisfa alle due equazioni, allora è una terna di coordinate baricentriche ($\varepsilon \circ x = 1$) e $x = ap + bq$, per opportuni a e b in C, perché x è ortogonale a c ($c \circ x = 0$). Si ha inoltre,

$$1 = \varepsilon \circ x = a(\varepsilon \circ p) + b(\varepsilon \circ q) = a + b$$

e quindi $X = x_0P_0 + x_1P_1 + x_2P_2$ è una combinazione baricentrica di P e Q; ovvero sta in $P \vee Q$.

Si osservi che il sottospazio direttore della retta è dato (anche in questo caso) dalle soluzioni del sistema omogeneo associato. Quindi le equazioni di ogni retta parallela a $P \vee Q$ si ottengono sostituendo alla riga c che compare nell'equazione di $P \vee Q$, una riga del tipo $c + a\varepsilon$, per un opportuno valore di $a \in C$. Se $u = u_0P_0 + u_1P_1 + u_2P_2$ è un vettore ($\varepsilon \circ u = 0$), la retta per i punti $P' = P + u$ e $Q' = Q + u$ ha equazioni $\begin{cases} \varepsilon \circ x = 1 \\ (c + a\varepsilon) \circ x = 0 \end{cases}$, ove $a = -c \circ u$ (e non cambia se si aggiunge ad u un vettore parallelo a $P \vee Q$).

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, col riferimento canonico $\mathscr{P} = (O, e_1, e_2, e_3)$, si consideri il piano $\pi : X_1 + X_3 = 3$.

(a) Si verifichi che i tre punti

$$P_0 = O + e_1 + 2e_3, \qquad P_1 = O + 2e_1 + e_2 + e_3, \qquad P_2 = O + e_2 + 3e_3,$$

appartengono a π e sono in posizione generale.

(b) Si determinino le coordinate baricentriche rispetto a P_0, P_1, P_2, dei punti $P = O + 3e_3$ e $Q = o + 3e_1$.

(c) Si determinino le equazioni in coordinate baricentriche (rispetto a P_0, P_1, P_2) della retta $P \vee Q$ e della sua traslata rispetto al vettore $v = e_1 + e_2 - e_3$. □

Possiamo quindi concludere questa breve discussione con la seguente

Proposizione. *Siano P_0, P_1, P_2 tre punti in posizione generale di un piano affine sul campo C.*
(a) I tre punti di coordinate baricentriche

$$P = p_0P_0 + p_1P_1 + p_2P_2, \qquad Q = q_0P_0 + q_1P_1 + q_2P_2, \qquad R = r_0P_0 + r_1P_1 + r_2P_2,$$

sono allineati se, e solo se,

$$\det\begin{pmatrix} p_0 & q_0 & r_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{pmatrix} = 0.$$

(b) Le tre rette di equazioni (in coordinate baricentriche)

$$\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 = 1 \\ a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 = 1 \\ b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 = 1 \\ c_0x_0 + c_1x_1 + c_2x_2 = 0 \end{cases},$$

sono parallele o concorrono ad uno stesso punto se, e solo se,

$$\det\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} = 0.$$

dim. (a) è immediato. Per quanto riguarda (b), basta osservare che se tre rette concorrono ad uno stesso punto X, di coordinate baricentriche $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, il sottospazio $\langle x \rangle$ è contenuto nel nucleo della matrice e ha dimensione positiva, essendo $x_0 + x_1 + x_2 = 1$. Se invece sono parallele, allora le tre righe della matrice appartengono al sottospazio generato da una di queste e da ε e quindi la matrice ha rango due. In entrambo i casi si annulla il determinante.

Viceversa, se il determinante della matrice si annulla, esiste una terna $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, non nulla, contenuta nel nucleo della matrice. Se $\varepsilon \circ x = a \neq 0$, posso dividere per a le entrate della terna e trovare le coordinate baricentriche di un punto che appartiene a tutte e tre le rette. Se invece, $\varepsilon \circ x = 0$; le entrate della terna sono le coordinate baricentriche di un vettore, non nullo, contenuto nei sottospazi direttori delle tre rette, che sono perciò parallele. □

Il lettore può notare la simmetria tra la condizione di allineamento di punti e la condizione di appartenenza ad uno stesso fascio (proprio o improprio) per le rette, che si è formulata usando coordinate baricentriche. Il lettore più attento, potrà osservare che un risultato analogo poteva essere ottenuto anche usando le coordinate usuali, come descritto nel seguente esercizio(*).

Esercizio 5. I punti $P = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 1 \\ x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$, del piano affine $\mathbb{A}^2(C)$, sono allineati se, e solo se, $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = 0$.

Le rette $r : a_1 + b_1X + c_1Y = 0$, $s : a_2 + b_2X + c_2Y = 0$, $t : a_3 + b_3X + c_3Y = 0$, del piano affine $\mathbb{A}^2(C)$, sono parallele o concorrono ad uno stesso punto se, e solo se, $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 0$. □

Dalla Proposizione precedente è facile dedurre con un calcolo diretto i Teoremi di Ceva e Menelao (così come si può leggere nel libro). Lasciamo al lettore un ultimo esercizio, ricordando che il *rapporto semplice* tra tre punti distinti e allineati, A, B, C, dello spazio affine è lo scalare $c = [A, B, C] = \frac{C-A}{B-A}$, ovvero l'unico per cui si ha $C - A = c(B - A)$ $(B \neq A)$.

Esercizio 6. Siano P_0, P_1, P_2 i vertici di un triangolo non degenere, ovvero tre punti in posizione generale di uno spazio affine; e siano dati i punti $X_0 \in P_1 \vee P_2$, $X_1 \in P_2 \vee P_0$, $X_2 \in P_0 \vee P_1$, distinti dai vertici del triangolo.
(a) I punti X_0, X_1, X_2, sono allineati se, e solo se, $[X_0, P_1, P_2][X_1, P_2, P_0][X_2, P_0, P_1] = 1$.
(b) Le rette $X_0 \vee P_0$, $X_1 \vee P_1$, $X_2 \vee P_2$, sono parallele o concorrono ad uno stesso punto se, e solo se, $[X_0, P_1, P_2][X_1, P_2, P_0][X_2, P_0, P_1] = -1$. □

(*) Il lettore può enfatizzare il parallelismo tra le due situazioni considerando in ogni caso il piano affine all'interno di C^3 (o di $\mathbb{A}(C^3)$, se si preferisce), e considerando la forma lineare $\varepsilon = (1, 1, 1)$ per distinguere punti e vettori nel caso di coordinate baricentriche, oppure la forma lineare $\delta_0 = (1, 0, 0)$ nel caso delle coordinate usuali.