Due parole sulle matrici a blocchi

Molto spesso nel libro o nello svolgimento degli esercizi usiamo la notazione di scrivere le matrici a blocchi e di operare con esse. Vorrei spendere qui due parole per descrivere il procedimento (e le operazioni associate) in modo un po' più formale, sperando di aiutare qualcuno a togliersi dei dubbi o delle incomprensioni sulla notazione.

Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita sul campo C e siano date le decomposizioni $V = V_1 \oplus V_2$, $W = W_1 \oplus W_2$, per opportuni sottospazi V_1, V_2 di V e W_1, W_2 di W, con $n_i = \dim V_i$ e $m_j = \dim W_j$, per i, j in $\{1, 2\}$. In corrispondenza alle decomposizioni possiamo considerare i vari endomorfismi di proiezione, ovvero

- $\pi_1 : V \to V$, proiezione su V_1, parallelamente a V_2;
- $\pi_2 : V \to V$, proiezione su V_2, parallelamente a V_1;
- $\sigma_1 : W \to W$, proiezione su W_1, parallelamente a W_2;
- $\sigma_2 : W \to W$, proiezione su W_2, parallelamente a W_1.

Ricordiamo che si ha: $\pi_1 + \pi_2 = \mathrm{id}_V$ e $\sigma_1 + \sigma_2 = \mathrm{id}_W$; e inoltre $\pi_1 \circ \pi_1 = \pi_1$, $\pi_1 \circ \pi_2 = 0 = \pi_2 \circ \pi_1$, $\pi_2 \circ \pi_2 = \pi_2$ e le analoghe per le σ_j.

Ad ogni omomorfismo $\phi \in \mathrm{Hom}_C(V, W)$, possiamo associare gli omomorfismi $\phi_{ji} : V \to W$, definiti ponendo $\phi_{ji} = \sigma_j \circ \phi \circ \pi_i$; ovvero

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\pi_i"'] \arrow[rrr, bend left, "\phi_{ji}"] & V \arrow[r, "\phi"'] & W \arrow[r, "\sigma_j"'] & W \end{tikzcd}$$

al variare di i e j in $\{1, 2\}$.

Si osservi che $\mathrm{im}\,\phi_{ji} \subseteq W_j$ e che $\phi_{ji}(x) = 0$ per ogni $x \in V_k$, con $k \neq i$. Possiamo quindi identificare ϕ_{ji} con la sua restrizione al sottospazio V_i (se $\phi_{ji|V_i} = 0$, allora $\phi_{ji} = 0$) e pensare a ϕ_{ji} (o la sua restrizione) come ad un elemento di $\mathrm{Hom}_C(V_i, W_j)$. In questo modo possiamo identificare $\mathrm{Hom}_C(V_i, W_j)$ ad un sottospazio di $\mathrm{Hom}_C(V, W)$.

Si osservi che si ha

$$\phi_{11} + \phi_{12} + \phi_{21} + \phi_{22} = (\sigma_1 + \sigma_2)\phi\pi_1 + (\sigma_1 + \sigma_2)\phi\pi_2 = \phi(\pi_1 + \pi_2) = \phi$$

e quindi che gli endomorfismi di proiezione $\mathrm{Hom}_C(V, W) \to \mathrm{Hom}_C(V, W)$, $\phi \mapsto \phi_{ji}$, per $i, j \in \{1, 2\}$ danno una decomposizione di $\mathrm{Hom}_C(V, W)$ come somma diretta (fare la verifica completa!), ovvero

$$\mathrm{Hom}_C(V, W) = \mathrm{Hom}_C(V_1, W_1) \oplus \mathrm{Hom}_C(V_1, W_2) \oplus \mathrm{Hom}_C(V_2, W_1) \oplus \mathrm{Hom}_C(V_2, W_2).$$

Andiamo a descrivere la cosa in termini di matrici e quindi fissiamo

- una base (ordinata) $\mathcal{V}_1$ di V_1, una base (ordinata) $\mathcal{V}_2$ di V_2, di modo che $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ sia una base (ordinata) di V;
- una base (ordinata) $\mathcal{W}_1$ di W_1, una base (ordinata) $\mathcal{W}_2$ di W_2, di modo che $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$ sia una base (ordinata) di W.

Se pensiamo a ϕ_{21} come ad un omomorfismo di V su W, la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi_{21})$, di ordine $(m_1 + m_2) \times (n_1 + n_2)$, ha le entrate nulle nei posti (i, j) se $i \leq m_1$ o $j > n_1$ (perché ha valore nullo sui vettori di base non appartenenti a $\mathcal{V}_1$ e il valore sui vettori di V_1 si scrive come combinazione dei vettori di $\mathcal{W}_2$) ed è questo che ce lo fa identificare con un omomorfismo $V_1 \to W_2$ ed indicare con $\alpha_{\mathcal{V}_1,\mathcal{W}_2}(\phi_{21})$ la sottomatrice di ordine $m_2 \times n_1$, corrispondente. Con queste identificazioni, possiamo scrivere

$$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} \alpha_{\mathcal{V}_1,\mathcal{W}_1}(\phi_{11}) & \alpha_{\mathcal{V}_2,\mathcal{W}_1}(\phi_{12}) \\ \alpha_{\mathcal{V}_1,\mathcal{W}_2}(\phi_{21}) & \alpha_{\mathcal{V}_2,\mathcal{W}_2}(\phi_{22}) \end{pmatrix}$$

e ricordare che la decomposizione si comporta bene rispetto alle operazioni di spazio vettoriale (somma e prodotto per scalari).

Come funziona la composizione di omomorfismi rispetto a decomposizioni di questo tipo?

Agli spazi precedenti, aggiungiamo uno spazio vettoriale (decomposto in somma diretta), $U = U_1 \oplus U_2$, con le proiezioni $\tau_i : U \to U$, $i = 1, 2$; ed un omomorfismo, $\psi : U \to V$, a cui si associano i corrispondenti $\psi_{ij} = \pi_i \circ \psi \circ \tau_j$, con i, j in $\{1, 2\}$. Si ha

$$\phi \circ \psi = (\phi_{11} + \phi_{12} + \phi_{21} + \phi_{22}) \circ (\psi_{11} + \psi_{12} + \psi_{21} + \psi_{22}).$$

Osservando che

$$\phi_{hi} \circ \psi_{jk} = \sigma_h \circ \phi \circ \pi_i \circ \pi_j \circ \psi \circ \tau_k = \delta_{ij}(\phi_{hi} \circ \psi_{ik}) \qquad \text{(delta di Kronecker)}$$

e

$$\phi_{h1} \circ \psi_{1k} + \phi_{h2} \circ \psi_{2k} = \sigma_h \circ \phi \circ (\pi_1 + \pi_2) \circ \psi \circ \tau_k = (\phi \circ \psi)_{hk},$$

si conclude che la composizione di omomorfismi si comporta in modo analogo al prodotto di matrici. Ovvero che, quando si hanno decomposizioni a blocchi delle matrici che siano 'compatibili', si possono moltiplicare le matrici tra loro operando 'per blocchi'.

Chi vuole, può facilmente generalizzare le considerazioni sin qui esposte al caso di decomposizioni più sofisticate, come $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$, $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$ (…e ritrovare che le operazioni introdotte per le matrici sono un caso particolare di questa notazione: quando, date le basi, $\mathcal{V} = \{ v_1, \dots, v_n \}$, e $\mathcal{W} = \{ w_1, \dots, w_m \}$, si considerino le decomposizioni $V = \langle v_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_n \rangle$ e $W = \langle w_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle w_m \rangle$ ed i ϕ_{ij} sono elementi di C).