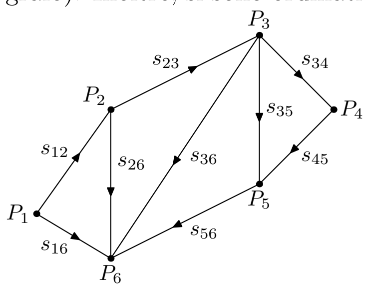
Chi tocca i fili...

In questo foglio vorrei dare qualche idea generale di come le tecniche dell'algebra lineare possano fornire strumenti per modellizzare dei fenomeni e come entrino in gioco alcune delle costruzioni che, a prima vista, sembrano particolarmente astratte, come la dualità.

Cominciamo con un *grafo orientato*, ovvero un insieme finito di punti $\{P_1, \dots, P_n\}$, (i *vertici* o *nodi* del grafo) ed un insieme di cammini $\{s_1, \dots, s_\ell\}$ (i *lati* del grafo) che congiungono coppie di vertici, con le ulteriori condizioni che

(i) nessun lato può iniziare e finire nello stesso vertice;
(ii) due vertici distinti possono essere congiunti al più da un lato;

(in modo un po' impreciso, possiamo dire che non sono permessi "cappi" nel grafo). Inoltre, si sono ordinati i vertici e su ogni lato si è fissato un 'verso di percorrenza' ovvero si è scelto quale sia il *punto iniziale* ed il punto *punto finale*. Ecco qui a fianco il disegno di un grafo orientato. Osserviamo a margine che, potremmo tranquillamente aggiungere al grafo il lato s_{14} senza violare le regole, e supponendo che "passi al di sopra" (o "al di sotto", se si preferisce) dei lati s_{26} s_{36} e s_{35}), perché coppie di lati di un grafo possono incontrarsi solo in un vertice del grafo stesso (si tratta cioè di un *complesso simpliciale di dimensione* 1). Possiamo quindi pensare di percorrere i lati del grafo contando il numero di volte e aggiungendo un segno per tener conto del verso in cui percorriamo il lato. Quindi l'espressione del tipo $3s_{12} - 5s_{36}$ può indicare che abbiamo percorso tre volte il lato s_{12} nel suo verso, cioè da P_1 a P_2, e che abbiamo percorso 5 volte il lato s_{36} nel verso che va da P_6 e P_3. Più in generale qualunque combinazione lineare a coefficienti interi dei lati può essere pensata come un "cammino" lungo i lati del grafo.



I numeri interi non formano un campo e quindi l'insieme di queste combinazioni lineari non è uno spazio vettoriale (è uno $\mathbb{Z}$-modulo, per chi sà). Possiamo ottenere uno spazio vettoriale se prendiamo coefficienti in $\mathbb{Q}$ o in $\mathbb{R}$ (o in qualunque altro campo, C) per le combinazioni lineari di lati. Indichiamo quindi con C_1 lo spazio vettoriale reale generato dai lati di un grafo orientato e con C_0 l'analogo spazio generato dai vertici. Indicheremo ancora con s_j, $j = 1, \dots, \ell$, (o col doppio indice s_{ij}, se vogliamo ricordare quali vertici sono congiunti dal lato) gli elementi della base di C_1 fatta dai lati del grafo ed indicheremo con v_i, $j = 1, \dots, n$, gli elementi della base di C_0 fatta dai vertici del grafo. Tra questi due spazi abbiamo una naturale applicazione lineare, $\partial : C_1 \to C_0$, che ad ogni lato associa 'la differenza tra i suoi estremi', ovvero $\partial(s_{ij}) = v_j - v_i$ se il lato è orientato dal vertice v_i verso v_j. Questa applicazione è detta il *bordo* o l'*operatore di bordo*.

Ad esempio, nel caso del grafo in figura abbiamo le basi (ordinate) $\mathcal{S} = (s_{12}, s_{16}, s_{23}, s_{26}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{45}, s_{56})$ di C_1 e $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ di C_0; e l'operatore di bordo, rispetto a queste basi, ha matrice

$$\alpha_{\mathcal{S},\mathcal{V}}(\partial) = A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice è ad elementi interi, perché l'operazione di 'passare al bordo' ha senso anche su $\mathbb{Z}$, ma possiamo pensarla come una matrice reale (o in qualunque altro campo).

A questo punto qualcuno potrebbe obiettare e chiedere che senso abbiano queste combinazioni a coefficienti reali dei lati del grafo. Le combinazioni a coefficienti interi erano 'cammini', mentre queste potremmo pensarle come catene di *correnti* che circolano con diverse 'intensità' sui lati del grafo, pensato come una 'rete elettrica'. Ancora una volta le intensità negative rappresentano una percorrenza nel verso opposto. Allora le combinazioni dei nodi le possiamo pensare come somme dei 'flussi di corrente' nei singoli nodi(†). L'operatore di bordo non diventa altro che l'applicazione che associa ad ogni catena di correnti la somma (algebrica) dei flussi entranti e uscenti in ciascuno dei vertici del grafo.

(†) Nei miei ricordi dei corsi di Fisica ci sono persino 'correnti complesse'; quindi non dovrebbe sollevare scandalo l'interpretazione proposta per gli elementi di C_0 e C_1.

L'operatore di bordo, come ogni applicazione lineare, dà luogo a due altri spazi: il nucleo $H_1 = \ker\partial$ ed il co-nucleo $H_0 = \operatorname{coker}\partial = C_0/\operatorname{im}\partial$. Proviamo a dare un'interpretazione di questi spazi.

Nell'esempio disegnato sopra, lo spazio H_0 ha dimensione 1, perché la matrice A ha rango $5 = \dim C_0 - 1$. Il motivo è più generale ed è dovuto al fatto che il grafo è *connesso*, ovvero *presi due vertici qualunque, P e Q, si può arrivare da P a Q camminando lungo lati del grafo*. Ciò significa che ogni differenza $v_i - v_j$ in C_0 appartiene a $\operatorname{im}\partial$ e quindi che tutte le coppie di vettori sono equivalenti, ovvero che il quoziente ha dimensione 1. L'immagine non può mai essere uguale a tutto C_0, perché tutti i vettori dell'immagine sono generati da differenze del tipo $v_j - v_i$ e quindi soddisfano all'equazione $X_1 + \cdots + X_n = 0$, quando si considerino le loro coordinate nella base $v_1, \ldots, v_n$. Più in generale, la dimensione dello spazio H_0 conta il numero di *componenti connesse* del grafo(*).

Sempre guardando alla matrice dell'esempio, possiamo osservare che ognuno dei triangolini nella figura dà origine a una relazione di dipendenza tra le colonne di A. Ad esempio, la presenza del triangolino di vertici $P_1P_2P_6$, dice che $\partial(s_{12} + s_{26} - s_{16}) = 0$ perché quel "cammino" corrisponde ad un circuito chiuso, che finisce nel punto in cui è cominciato e produce un bordo nullo. Quindi i quattro triangoli nella figura corrispondono ad altrettante relazioni di dipendenza che spiegano come il rango di ∂ possa essere al massimo 5 e la stima è corretta, per quanto visto sopra.

Nella nostra interpretazione 'elettrizzante', gli elementi di H_1 sono quindi "circuiti chiusi" o *cicli* all'interno del grafo e le corrispondenti distribuzioni di correnti devono produrre un flusso nullo in ciascun nodo. Chi ha qualche ricordo di Fisica, può ritrovare la

[**I legge di Kirchhoff**] In un circuito chiuso la somma dei flussi di corrente ad ogni nodo è nulla.

Di solito questa viene indicata anche come la *legge di Kirchhoff delle correnti* o KCL e sta ad indicare che nel circuito chiuso non c'è scambio di correnti con l'esterno.

Gli spazi incontrati finora, C_0, C_1, H_0, H_1, hanno quindi dimensioni

- $d_0 = \dim C_0$, numero dei nodi (vertici) del grafo;
- $d_1 = \dim C_1$, numero dei lati del grafo;
- $h_0 = \dim H_0$, numero delle componenti connesse del grafo;
- $h_1 = \dim H_1$, numero dei cicli di base del grafo.

Le quattro dimensioni sono legate dalla relazione fondamentale $d_0 - d_1 = h_0 - h_1$, come si deduce ricordando che $H_1 = \ker\partial$ e $H_0 = C_0/\operatorname{im}\partial$. Può essere utile per ricordare questo fatto, mettere i quattro spazi nella sequenza

$$0 \to H_1 \xrightarrow{\text{incl}} C_1 \xrightarrow{\partial} C_0 \xrightarrow{\text{proi}} H_0 \to 0$$

e ricordare che ad ogni passo l'immagine di un'applicazione è uguale al nucleo della successiva (sequenza esatta) e quindi $h_1 - d_1 + d_0 - h_0 = 0$.

Possiamo quindi passare agli spazi duali ed all'analoga sequenza associata all'applicazione trasposta, ovvero

$$0 \to H^0 \xrightarrow{\text{incl}} C^0 \xrightarrow{\partial^*} C^1 \xrightarrow{\text{proi}} H^1 \to 0$$

ove $C^0 = C_0^*$, $C^1 = C_1^*$, $H^0 = H_0^*$, $H^1 = H_1^*$, e ∂^* è la trasposta di ∂. Infatti, $H^0 = H_0^* = \ker\partial^*$ è ortogonale a $\operatorname{im}\partial$ e quindi tutti i suoi elementi, come elementi di C_0^*, producono la forma lineare nulla sull'immagine di ∂ e quindi determinano una forma lineare sul quoziente $H_0 = C_0/\operatorname{im}\partial$. Reciprocamente, vi è dualità tra H_1 ed H^1 in quanto $\partial^{**} = \partial$.

Quale interpretazione possiamo dare alla 'sequenza dei duali'? Un elemento $x \in C^0$ può essere pensato come una scelta di 'potenziali elettrici' posti nei nodi del grafo; in tal modo $\partial^*(x)$ fornisce le corrispondenti 'differenze di potenziale' sui lati del grafo e la conoscenza di $\partial^*(x)$ determina x a meno di sommare la stessa constante ai coefficienti di tutti i vertici appartenenti alla stessa componente connessa del grafo (il duale H^0 di H_0, come sottospazio di C^0). La dualità tra C_1 e C^1, accoppia intensità di corrente (Ampere) con differenze di potenziale (Volt) e produce quindi potenza (Watt), ovvero energia per unità di tempo.

(*) Due vertici P e Q sono *nella stessa componente* se si può arrivare da P a Q camminando lungo lati del grafo. Si tratta di una relazione di equivalenza e le classi di equivalenza formano le componenti connesse del grafo. Chi sà di più, riconoscerà le *componenti connesse per archi* del grafo.

Il fatto che $\operatorname{im}\partial^* = (\ker\partial)^\perp$ dice che le differenze di potenziale di un elemento $\partial^* x$, con $x \in C^0$, devono annullarsi contro ogni elemento del nucleo di ∂, e quindi contro ogni circuito chiuso contenuto nel grafo, ovvero

[**II legge di Kirchhoff**] In un circuito chiuso la somma delle differenze dei potenziali posti sui nodi è nulla.

Di solito questa viene indicata anche come la *legge di Kirchhoff dei voltaggi* o KVL[†].

La cosiddetta *Legge di Ohm* ci permette di passare dal nostro grafo orientato a un vero e proprio circuito elettrico, pensando ogni lato del grafo come il ramo di un circuito, formato da un filo omogeneo di un qualche materiale. Allora, data una differenza di potenziale, c_i sul lato s_i del grafo, l'intensità di corrente prodotta nel lato è $y_i = \rho_i c_i$, ove la costante $\rho_i > 0$ è detta la *conduttanza* o *capacità* del lato s_i (di solito si preferisce indicare $r_i = \frac{1}{\rho_i}$, ovvero la sua *resistenza*). Quindi abbiamo un 'vero' circuito elettrico quando è fissata su ogni lato del grafo orientato una resistenza e possiamo associare quindi ad ogni elemento di C^1 una catena di correnti in C_1. Con un linguaggio un po' più sofisticato, ciò corrisponde ad un'applicazione lineare invertibile $\rho : C^1 \to C_1$, con matrice diagonale, $P = \alpha_{\mathcal{S}^*,\mathcal{S}}(\rho)$, nelle fissate basi duali, $\mathcal{S}^* = \{ s^1, \dots, s^\ell \}$ e $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_\ell\}$, prodotte dagli ℓ lati del grafo (ove $s^i \circ s_j = \delta_{i,j}$).

Supponiamo allora di avere un elemento $c \in C^1$, ovvero una scelta di differenze di potenziale lungo i lati del grafo (ad esempio ponendo sui rami delle batterie di dato voltaggio) e poniamo dei potenziali $x \in C^0$ sui nodi del grafo. Le correnti e i relativi flussi ai nodi, compatibili con questi dati, sono

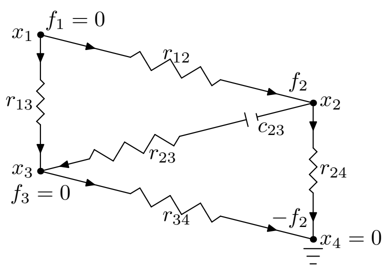
$$y = \rho(c) - \rho(\partial^* x), \qquad \text{e} \qquad f = \partial y.$$

Essendo ρ invertibile, possiamo quindi scrivere, in modo equivalente

$$\rho^{-1} y + \partial^* x = c \qquad \text{e} \qquad \partial y = f$$

e, eliminando y, scrivere $\partial\rho\partial^* x = \partial\rho c - f$ (condizione di equilibrio). Come tutte le equazioni, possiamo usarla per ricavare alcuni dei termini conoscendo gli altri.

Vediamo un esempio. Partiamo dal circuito indicato nella figura qui sotto. Abbiamo quindi un grafo con quattro vertici e cinque lati. Su ciascun lato c'è la resistenza r_{ij}, e sono fissati dei flussi f_i nei nodi del circuito, prendendo $f_1 = f_3 = 0$ e fissando un certo f_2 in P_2. Necessariamente deve aversi $f_4 = -f_2$ se vogliamo essere nell'immagine di C_1 (questa è una condizione necessaria alla risolubilità del sistema lineare). Inoltre, fissiamo una differenza di potenziale nel lato s_{23}, ponendo una "batteria", ovvero fissiamo un elemento $c = c_{23}s^{23} \in C^1$. Ci poniamo il problema di trovare dei potenziali elettrici $x_1, \dots, x_4$, ovvero un elemento $x = x_1 v^1 + \cdots + x_4 v^4 \in C^0$, che produca la distribuzione di corrente nel circuito. Non è restrittivo supporre di aver "messo a terra" il nodo P_4, ovvero cercare soluzioni con $x_4 = 0$, visto che i potenziali sono determinati a meno della somma di una stessa costante in ogni nodo, perché il grafo è connesso.



A partire da $f \in \operatorname{im}\partial$, esiste un elemento $y_0 \in C_1$, tale che $\partial(y_0) = f$ e possiamo modificare y_0, sommandogli elementi di $H_1 = \ker\partial$. Aver fissato $c \in C^1$ modifica la catena in $y = y_0 + \rho(c)$ e ci dice che le distribuzioni di correnti compatibili con i dati sono tutte e sole quelle del tipo $y + u$, al variare di $u \in H_1$ (ovvero in $y + \ker\partial$). Il problema è quindi di capire se esiste un elemento $v_0 = \partial^* x \in \operatorname{im}\partial^*$ tale che $\rho(v_0) \in y + \ker\partial$. Data l'arbitrarietà di y, dovuta alla scelta di c, ciò accade se, e solo se, $C_1 = \rho(\operatorname{im}\partial^*) + \ker\partial$. I due spazi hanno dimensioni complementari, perché

$$\dim(\operatorname{im}\partial^*) = \dim C^0 - \dim H^0 = d_0 - h_0 \qquad \text{e} \qquad \dim(\ker\partial) = \dim H_1 = h_1,$$

[†] Gustav Kirchhoff (1824-1887) pubblicò queste leggi nel 1845, quando ancora era studente. I suoi interessi erano prevalentemente rivolti alla Fisica, ma tra gli studenti che lo ebbero come advisor per il dottorato, troviamo due famosi geometri algebrici tedeschi come Max Noether e Jacob Lüroth. Si veda la biografia nel sito dell'Università di St.Andrews `www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Kirchhoff.html`.

e $d_0 - h_0 + h_1 = d_1$, come osservato in precedenza. Inoltre, $\rho(\operatorname{im}\partial^*) \cap \ker\partial = \langle 0 \rangle$, perché se $v = t_{12}s^{12} + \cdots + t_{34}s^{34} \in \operatorname{im}\partial^*$ e $\rho(v) \in \ker\partial$; per la relazione fondamentale $\operatorname{im}\partial^* = (\ker\partial)^\perp$ (II legge di Kirchhoff), si ha

$$0 = v \circ \rho(v) = (t_{12}s^{12} + \cdots + t_{34}s^{34}) \circ (\tfrac{t_{12}}{r_{12}}s_{12} + \cdots + \tfrac{t_{34}}{r_{34}}s_{34}) = \tfrac{t_{12}^2}{r_{12}} + \cdots + \tfrac{t_{34}^2}{r_{34}}$$

e quindi $v = 0$, essendo le resistenze numeri reali positivi.

Questo tipo di modellizzazione, è abbastanza frequente nelle applicazioni e, con possibili variazioni, si presenta in molte situazioni, ben diverse dalle reti elettriche. Vediamo un esempio più semplice che descriva come si possa assegnare un "potenziale" economico alle varie regioni di un paese. Anche in questo caso possiamo partire da un grafo che abbia un nodo per ogni regione del paese e un ulteriore nodo per rappresentare tutto ciò che sta al di fuori (gli scambi con l'estero). Due nodi sono uniti da un lato se tra le due regioni corrispondenti (estero compreso) ci sono scambi economici. Anche qui conviene fissare un verso sui lati e decidere quale verso di scambio si prenda come positivo. Analizzando la situazione degli scambi possiamo associare ad ogni lato un numero reale che rappresenti il valore degli scambi tra le due regioni poste ai vertici del lato (se la regione v_i acquista per 20 milioni di euro beni e servizi dalla regione v_j, ma vende alla stessa beni e servizi propri per 18 milioni di euro, allora la differenza sarà 2 milioni se il verso scelto va da v_i a v_j; oppure sarà -2 nel caso contrario). Queste differenze, rappresentano le differenze nel 'potenziale commerciale' tra le varie regioni. Cioè un elemento y dello spazio C^1 associato al grafo in questione. Determinare i potenziali significa determinare, se esiste, un elemento $x \in C^0$ tale che $\partial^* x = y$, ove $\partial : C_1 \to C_0$ è l'operatore di bordo del grafo in questione.

In generale, ciò non sarà possibile; a meno che $y \in \operatorname{im}\partial^* = (\ker\partial)^\perp$. Se $y \notin \operatorname{im}\partial^*$, ci si può accontentare di un risultato "approssimato", andando a sostituire y con il vettore $y_0 \in \operatorname{im}\partial^*$ che abbia distanza minima da y (supponiamo di misurare la distanza $\|y - y_0\|$ usando il prodotto scalare su C^1 che ha la base definita dai lati come base ortonormale). Questo tipo di approssimazione viene spesso usato nelle applicazioni.