Numeri complessi

maurizio candilera

October 1, 2018

1. Introduzione

1. Introduzione

2. Sistemi numerici
   - Numeri naturali
   - Numeri interi
   - Numeri razionali
   - da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$
   - Numeri reali

1. Introduzione
2. Sistemi numerici
   - Numeri naturali
   - Numeri interi
   - Numeri razionali
   - da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$
   - Numeri reali
3. Numeri Complessi
   - piano di Gauss
   - Trasformazioni di Möbius (cenni)

Introduzione

- I numeri complessi hanno fatto le prime comparse nei lavori dei matematici rinascimentali, come *radici immaginarie* di equazioni algebriche.

Introduzione

- I numeri complessi hanno fatto le prime comparse nei lavori dei matematici rinascimentali, come *radici immaginarie* di equazioni algebriche.
- L'introduzione e l'uso sistematico dei numeri complessi viene messo in relazione con la dimostrazione di Gauss del *Teorema fondamentale dell'Algebra* (1799) e la loro rappresentazione geometrica (piano di Argand-Gauss).

Introduzione

- I numeri complessi hanno fatto le prime comparse nei lavori dei matematici rinascimentali, come *radici immaginarie* di equazioni algebriche.
- L'introduzione e l'uso sistematico dei numeri complessi viene messo in relazione con la dimostrazione di Gauss del *Teorema fondamentale dell'Algebra* (1799) e la loro rappresentazione geometrica (piano di Argand-Gauss).
- A partire dal XIX secolo, i numeri complessi compaiono sistematicamente nelle applicazioni della Matematica alla Fisica e diventano uno strumento per la risoluzione di problemi matematici ed un ambiente più *naturale* dei numeri reali per lo studio di problemi geometrici (Hilbert's Nullstellensatz).

Numeri Naturali

Consideriamo come noti i numeri naturali $\mathbb{N} = \{\, 0, 1, 2, 3, \dots \}$ e passiamo in rassegna le loro proprietà.

Numeri Naturali

Consideriamo come noti i numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ e passiamo in rassegna le loro proprietà. I numeri naturali nascono dalla necessità di contare gli oggetti e quindi la loro proprietà fondamentale è di avere un *successore* per ogni elemento. Possiamo descrivere la cosa in termini di insiemi.

Definizione (...o quasi)

Dato un insieme x, il suo *successore* è $x + 1 := x \cup \{x\}$. I numeri naturali sono i successori dell'insieme vuoto.

Ad esempio: $0 = \varnothing$, $1 = \{0\} = \{\varnothing\}$, $2 = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $3 = \{0, 1, 2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, ecc.

Numeri Naturali: somma e prodotto

Un numero naturale n appartiene a tutti i suoi successori e quindi la relazione di appartenenza tra insiemi definisce un buon ordinamento tra i numeri naturali ($n < m$ se m è un successore di n e quindi $n \in m$).

Numeri Naturali: somma e prodotto

Un numero naturale n appartiene a tutti i suoi successori e quindi la relazione di appartenenza tra insiemi definisce un buon ordinamento tra i numeri naturali ($n < m$ se m è un successore di n e quindi $n \in m$). Il numero naturale n è l'n-esimo successore di 0, ovvero $n = (((0 + 1) + 1) + \cdots) + 1$ (n addendi uguali ad 1).

Numeri Naturali: somma e prodotto

Un numero naturale n appartiene a tutti i suoi successori e quindi la relazione di appartenenza tra insiemi definisce un buon ordinamento tra i numeri naturali ($n < m$ se m è un successore di n e quindi $n \in m$). Il numero naturale n è l'n-esimo successore di 0, ovvero $n = (((0+1)+1)+\cdots)+1$ (n addendi uguali ad 1).

Definizione (. . . o quasi): somma

Il numero naturale $m+n$ è l'n-esimo successore di m, ovvero $m+n = (((m+1)+1)+\cdots)+1$ (n addendi uguali ad 1).

Numeri Naturali: somma e prodotto

Un numero naturale n appartiene a tutti i suoi successori e quindi la relazione di appartenenza tra insiemi definisce un buon ordinamento tra i numeri naturali ($n < m$ se m è un successore di n e quindi $n \in m$). Il numero naturale n è l'n-esimo successore di 0, ovvero $n = (((0+1)+1)+\cdots)+1$ (n addendi uguali ad 1).

Definizione (. . . o quasi): somma

Il numero naturale $m+n$ è l'n-esimo successore di m, ovvero $m+n = (((m+1)+1)+\cdots)+1$ (n addendi uguali ad 1).

Definizione (. . . o quasi): prodotto

Il numero naturale mn si ottiene iterando n volte la somma di m con se stesso; ovvero $mn = (((m+m)+m)+\cdots)+m$ (n addendi uguali ad m).

Le operazioni di somma e prodotto sono due funzioni

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad \cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

che godono delle seguenti proprietà; per ogni x, y, z in $\mathbb{N}$, si ha

Le operazioni di somma e prodotto sono due funzioni

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad \cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

che godono delle seguenti proprietà; per ogni x, y, z in $\mathbb{N}$, si ha

somma

- (associativa) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
- (commutativa) $x + y = y + x$;
- (esistenza dell'elemento neutro) $x + 0 = x = 0 + x$.

Le operazioni di somma e prodotto sono due funzioni

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad \cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

che godono delle seguenti proprietà; per ogni x, y, z in $\mathbb{N}$, si ha

somma

- (associativa) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
- (commutativa) $x + y = y + x$;
- (esistenza dell'elemento neutro) $x + 0 = x = 0 + x$.

prodotto

- (associativa) $(xy)z = x(yz)$;
- (commutativa) $xy = yx$;
- (esistenza dell'elemento neutro) $x1 = x = 1x$.

Le operazioni di somma e prodotto sono due funzioni

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad \cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

che godono delle seguenti proprietà; per ogni x, y, z in $\mathbb{N}$, si ha

somma

- (associativa) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
- (commutativa) $x + y = y + x$;
- (esistenza dell'elemento neutro) $x + 0 = x = 0 + x$.

prodotto

- (associativa) $(xy)z = x(yz)$;
- (commutativa) $xy = yx$;
- (esistenza dell'elemento neutro) $x1 = x = 1x$.

Inoltre (distributiva) $(x + y)z = xz + yz$

Tutte le proprietà precedenti andrebbero verificate a partire dalle definizioni[1]. Così come andrebbero verificate le proprietà dell'*ordine*, ovvero ogni numero naturale è *minore* dei propri successori $(n < n+1)$ e si ha

ordine

- (transitiva) per ogni x, y, z, si ha $x < y,\ y < z \ \Rightarrow\ x < z$.
- (tricotomia) dati due numeri naturali x, y, una e una sola delle seguenti affermazioni è vera: $x < y$, oppure $x = y$, oppure $x > y$.

[1] Per una definizione più precisa dei numeri naturali, delle operazioni e dell'ordine si può vedere la pagina di Richard Kaye - Birmingham

Per tutti i numeri naturali maggiori di zero (i *positivi*) possiamo definire l'*antecedente* ($n - 1$ è il più grande numero naturale minore di n).

Per tutti i numeri naturali maggiori di zero (i *positivi*) possiamo definire l'*antecedente* ($n - 1$ è il più grande numero naturale minore di n). Si può quindi definire la *differenza* $n - m$ quando il numero $m < n$.

Per tutti i numeri naturali maggiori di zero (i *positivi*) possiamo definire l'*antecedente* ($n-1$ è il più grande numero naturale minore di n). Si può quindi definire la *differenza* $n-m$ quando il numero $m<n$.
Si amplia l'insieme dei numeri naturali, introducendo i *numeri interi*, per poter fare la differenza di ogni coppia di numeri.
La costruzione richiede alcuni dettagli tecnici che non faremo qui.
L'insieme dei numeri interi è il quoziente $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})/\sim$ rispetto alla

relazione di equivalenza

$$(a,b)\sim(a',b') \overset{def}{\iff} a+b'=a'+b$$

e si estendono opportunamente le operazioni e la relazione d'ordine.

Numeri Interi

I numeri interi

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

L'insieme dei numeri interi è il quoziente $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$ e la classe di equivalenza, $[a, b]$, della coppia (a, b) 'rappresenta' il numero intero $a - b$.

Numeri Interi

I numeri interi

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

L'insieme dei numeri interi è il quoziente $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$ e la classe di equivalenza, $[a, b]$, della coppia (a, b) 'rappresenta' il numero intero $a - b$. Ad esempio: $[2, 2] = [0, 0] = 0$, $[3, 2] = [1, 0] = 1$, $[3, 5] = [0, 2] = -2$.

Le operazioni e l'ordine sono definiti da

$$[a, b] + [c, d] \stackrel{def}{=} [a + c, b + d], \quad [a, b][c, d] \stackrel{def}{=} [ac + bd, bc + ad]$$

$$[a, b] < [c, d] \stackrel{def}{\iff} a + d < b + c$$

Non dipendono dalla scelta dei rappresentanti.

Le operazioni di somma e prodotto godono delle seguenti proprietà; per ogni x, y, z in $\mathbb{Z}$, si ha

Le operazioni di somma e prodotto godono delle seguenti proprietà; per ogni x, y, z in $\mathbb{Z}$, si ha

somma

- (associativa) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
- (commutativa) $x + y = y + x$;
- (esistenza dell'elemento neutro) $x + 0 = x = 0 + x$.
- (esistenza dell'opposto) dato x, esiste $-x$ tale che $x + (-x) = 0 = (-x) + x$.

prodotto

- (associativa) $(xy)z = x(yz)$;
- (commutativa) $xy = yx$;
- (esistenza dell'elemento neutro) $x1 = x = 1x$.

Inoltre

(distributiva) $(x+y)z = xz+yz$

Le operazioni di somma e prodotto godono delle seguenti proprietà; per ogni x, y, z in $\mathbb{Z}$, si ha

somma

- (associativa) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
- (commutativa) $x + y = y + x$;
- (esistenza dell'elemento neutro) $x + 0 = x = 0 + x$.
- (esistenza dell'opposto) dato x, esiste $-x$ tale che $x + (-x) = 0 = (-x) + x$.

prodotto

- (associativa) $(xy)z = x(yz)$;
- (commutativa) $xy = yx$;
- (esistenza dell'elemento neutro) $x1 = x = 1x$.

Inoltre

(distributiva) $\quad (x+y)z = xz+yz$

Un insieme dotato di due operazioni con le proprietà scritte sopra si dice un *anello commutativo con unità*.

Molte proprietà importanti dell'anello $\mathbb{Z}$ nascono dal fatto di essere dotato dell'algoritmo di *divisione euclidea*. Dati due numeri interi a e b, con $b \neq 0$, esistono e sono unici due interi, q (quoziente) ed r (resto), tali che

$$a = bq + r \qquad \text{e} \qquad 0 \leq r < |b|.$$

Si dice che b *divide* a (in simboli $b \mid a$) se è nullo il resto della divisione euclidea.

Molte proprietà importanti dell'anello $\mathbb{Z}$ nascono dal fatto di essere dotato dell'algoritmo di *divisione euclidea*. Dati due numeri interi a e b, con $b \neq 0$, esistono e sono unici due interi, q (quoziente) ed r (resto), tali che

$$a = bq + r \qquad \text{e} \qquad 0 \leq r < |b|.$$

Si dice che b *divide* a (in simboli $b \mid a$) se è nullo il resto della divisione euclidea.

Si amplia l'insieme dei numeri interi, introducendo i *numeri razionali*, per poter fare la divisione esatta a/b con $b \neq 0$.

Molte proprietà importanti dell'anello $\mathbb{Z}$ nascono dal fatto di essere dotato dell'algoritmo di *divisione euclidea*. Dati due numeri interi a e b, con $b \neq 0$, esistono e sono unici due interi, q (quoziente) ed r (resto), tali che

$$a = bq + r \qquad \text{e} \qquad 0 \leq r < |b|.$$

Si dice che b *divide* a (in simboli $b \mid a$) se è nullo il resto della divisione euclidea.

Si amplia l'insieme dei numeri interi, introducendo i *numeri razionali*, per poter fare la divisione esatta a/b con $b \neq 0$.

Si costruisce di nuovo un quoziente $(\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}))/\sim$ rispetto ad una opportuna relazione di equivalenza e si estendono le operazioni e la relazione d'ordine.

Numeri Razionali

Sull'insieme $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ si pone la relazione di equivalenza

$$(a, b) \sim (a', b') \overset{def}{\iff} ab' = a'b.$$

Si indica con $\mathbb{Q}$ l'insieme delle classi di equivalenza e si chiamano *numeri razionali* i suoi elementi.

Numeri Razionali

Sull'insieme $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \smallsetminus \{0\})$ si pone la relazione di equivalenza

$$(a, b) \sim (a', b') \overset{def}{\iff} ab' = a'b.$$

Si indica con $\mathbb{Q}$ l'insieme delle classi di equivalenza e si chiamano *numeri razionali* i suoi elementi. Un numero razionale si rappresenta con una *frazione* $\frac{a}{b}$ (con a, b in $\mathbb{Z}$ e $b \neq 0$). Due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{a'}{b'}$ rappresentano lo stesso numero razionale se $ab' = a'b$ in $\mathbb{Z}$. Il numero intero n si identifica con la frazione $\frac{n}{1}$ e in questo modo $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
Si ha $\frac{0}{2} = \frac{0}{1} = 0$, $\frac{6}{2} = \frac{3}{1} = 3$, $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Le operazioni sono definite da

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \stackrel{def}{=} \frac{ad+bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b}\,\frac{c}{d} \stackrel{def}{=} \frac{ac}{bd},$$

e non dipendono dalla scelta dei rappresentanti.

Le operazioni sono definite da

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \stackrel{def}{=} \frac{ad+bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b}\frac{c}{d} \stackrel{def}{=} \frac{ac}{bd},$$

e non dipendono dalla scelta dei rappresentanti.

Un numero razionale è *positivo* se è rappresentabile da una frazione $\frac{a}{b}$ con $a > 0 < b$. La relazione d'ordine è definita da

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \stackrel{def}{\iff} \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{bd} \text{ è positivo.}$$

Le operazioni sono definite da

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} \overset{def}{=} \frac{ad+bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b}\frac{c}{d} \overset{def}{=} \frac{ac}{bd},$$

e non dipendono dalla scelta dei rappresentanti.

Un numero razionale è *positivo* se è rappresentabile da una frazione $\frac{a}{b}$ con $a > 0 < b$. La relazione d'ordine è definita da

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \overset{def}{\iff} \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{bd} \text{ è positivo.}$$

$\frac{a}{b} \neq 0$ se $a \neq 0$. In tal caso $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{a}{b}\frac{b}{a} = 1$.

Le operazioni di somma e prodotto godono delle seguenti proprietà; per ogni x, y, z in $\mathbb{Q}$, si ha

Le operazioni di somma e prodotto godono delle seguenti proprietà; per ogni x, y, z in $\mathbb{Q}$, si ha

somma

- (associativa) $(x+y)+z = x+(y+z)$;
- (commutativa) $x+y = y+x$;
- (esistenza dell'elemento neutro) $x+0 = x = 0+x$.
- (esistenza dell'opposto) dato x, esiste $-x$ tale che $x+(-x) = 0 = (-x)+x$.

prodotto

- (associativa) $(xy)z = x(yz)$;
- (commutativa) $xy = yx$;
- (esistenza dell'elemento neutro) $x1 = x = 1x$.
- (esistenza dell'inverso) dato $x \neq 0$, esiste x^{-1} tale che $x\,x^{-1} = 1 = x^{-1}x$.

(distributiva) $(x+y)z = xz + yz$.

Le operazioni di somma e prodotto godono delle seguenti proprietà; per ogni x, y, z in $\mathbb{Q}$, si ha

somma

- (associativa) $(x+y)+z = x+(y+z)$;
- (commutativa) $x+y = y+x$;
- (esistenza dell'elemento neutro) $x+0 = x = 0+x$.
- (esistenza dell'opposto) dato x, esiste $-x$ tale che $x+(-x) = 0 = (-x)+x$.

prodotto

- (associativa) $(xy)z = x(yz)$;
- (commutativa) $xy = yx$;
- (esistenza dell'elemento neutro) $x1 = x = 1x$.
- (esistenza dell'inverso) dato $x \neq 0$, esiste x^{-1} tale che $x\,x^{-1} = 1 = x^{-1}x$.

(distributiva) $(x+y)z = xz+yz$.

Un insieme dotato di due operazioni con le proprietà scritte sopra si dice un *campo* [o *corpo commutativo*].

Nel campo $\mathbb{Q}$ la relazione d'ordine ha le proprietà già descritte in $\mathbb{N}$ (transitività e tricotomia) ed è legata alle operazioni dalle proprietà

operazioni e ordine

Per ogni coppia di numeri razionali x, y, si ha

$$x < y \Rightarrow x + c < y + c \quad \text{per ogni } c \in \mathbb{Q}$$

$$x < y, \; c > 0 \Rightarrow xc < yc$$

Nel campo $\mathbb{Q}$ la relazione d'ordine ha le proprietà già descritte in $\mathbb{N}$ (transitività e tricotomia) ed è legata alle operazioni dalle proprietà

operazioni e ordine

Per ogni coppia di numeri razionali x, y, si ha

$$x < y \Rightarrow x + c < y + c \quad \text{per ogni } c \in \mathbb{Q}$$
$$x < y,\ c > 0 \Rightarrow xc < yc$$

Un campo con una relazione d'ordine che gode di tutte le proprietà scritte sopra è un *campo ordinato*.

Esercizio

In un campo ordinato $1 > 0$ e tutti i quadrati sono positivi.

Supponiamo di porci nell'ambito della Geometria Euclidea. I numeri razionali sono totalmente ordinati e si mettono in corrispondenza con i punti di una retta (orientata), fissando due punti distinti, P_0 e P_1, da far corrispondere a 0 ed a 1 e disponendo 'di conseguenza' gli altri punti.

Supponiamo di porci nell'ambito della Geometria Euclidea. I numeri razionali sono totalmente ordinati e si mettono in corrispondenza con i punti di una retta (orientata), fissando due punti distinti, P_0 e P_1, da far corrispondere a 0 ed a 1 e disponendo 'di conseguenza' gli altri punti.
È noto che in questo modo non tutti i punti della retta corrispondono a numeri razionali, ovvero ci sono lunghezze che non hanno un rapporto razionale con il segmento P_0P_1. Un noto esempio è la diagonale del quadrato di lato P_0P_1, la cui lunghezza ha rapporto $\sqrt{2}$ con il lato; o la lunghezza della circonferenza di raggio P_0P_1, la cui lunghezza ha rapporto 2π con il raggio.

Supponiamo di porci nell'ambito della Geometria Euclidea. I numeri razionali sono totalmente ordinati e si mettono in corrispondenza con i punti di una retta (orientata), fissando due punti distinti, P_0 e P_1, da far corrispondere a 0 ed a 1 e disponendo 'di conseguenza' gli altri punti.
È noto che in questo modo non tutti i punti della retta corrispondono a numeri razionali, ovvero ci sono lunghezze che non hanno un rapporto razionale con il segmento P_0P_1. Un noto esempio è la diagonale del quadrato di lato P_0P_1, la cui lunghezza ha rapporto $\sqrt{2}$ con il lato; o la lunghezza della circonferenza di raggio P_0P_1, la cui lunghezza ha rapporto 2π con il raggio.
Volendo disporre di un insieme di numeri che sia un campo ordinato e che contenga elementi sufficienti a rappresentare queste grandezze, è necessaria un ulteriore estensione. Cerchiamo di descriverla molto sommariamente nelle prossime slides, rimandando al corso di Analisi Matematica per i necessari approfondimenti.

In $\mathbb{Q}$ si definisce il *valore assoluto* $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{altrimenti} \end{cases}$.

Per ogni $x \in \mathbb{Q}$, $|x| \geq 0$ e si hanno le proprietà

valore assoluto

Per ogni x, y si ha

- $|x| = 0$ se, e solo se, $x = 0$;
- $|x + y| \leq |x| + |y|$;
- $|xy| = |x||y|$.

Tramite il valore assoluto si definisce la *distanza* tra due numeri razionali x e y come $|x - y|$. Tramite questa distanza è possibile definire la nozione di convergenza per le successioni di numeri razionali.

Una *successione di numeri razionali* è una qualsiasi applicazione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Data una successione scriveremo $x_n := f(n)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, e la indicheremo brevemente scrivendo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Una *successione di numeri razionali* è una qualsiasi applicazione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Data una successione scriveremo $x_n := f(n)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, e la indicheremo brevemente scrivendo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

successione convergente

La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* ad $\ell \in \mathbb{Q}$ se, fissato comunque $\varepsilon > 0$, esiste un indice n_0 tale che $n > n_0 \Rightarrow |\ell - x_n| < \varepsilon$.

La *successione costante*, $x_n = q$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, converge a q.

Una *successione di numeri razionali* è una qualsiasi applicazione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Data una successione scriveremo $x_n := f(n)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, e la indicheremo brevemente scrivendo $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

successione convergente

La successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge* ad $\ell \in \mathbb{Q}$ se, fissato comunque $\varepsilon > 0$, esiste un indice n_0 tale che $n > n_0 \Rightarrow |\ell - x_n| < \varepsilon$.

La *successione costante*, $x_n = q$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, converge a q.

successione di Cauchy

La successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una *successione di Cauchy* se, fissato comunque $\varepsilon > 0$, esiste un indice n_0 tale che $n, m > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$.

In modo un po' vago possiamo dire che i termini di una successione di Cauchy si avvicinano tra loro al crescere dell'indice n.

Sull'insieme $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$ di tutte le successioni di Cauchy di numeri razionali
Si possono definire operazioni di somma e prodotto ponendo

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}+(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \text{e} \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}}(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Sull'insieme $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$ di tutte le successioni di Cauchy di numeri razionali
Si possono definire operazioni di somma e prodotto ponendo

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}+(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \text{e} \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}}(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_ny_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Si può definire una relazione di ordine parziale in $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$ ponendo

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \leq (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{def}{\iff} \exists n_0(n > n_0 \Rightarrow y_n - x_n \geq 0).$$

Sull'insieme $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$ di tutte le successioni di Cauchy di numeri razionali
Si possono definire operazioni di somma e prodotto ponendo

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}+(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \text{e} \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}}(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_ny_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Si può definire una relazione di ordine parziale in $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$ ponendo

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \leq (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{def}{\iff} \exists n_0(n > n_0 \Rightarrow y_n - x_n \geq 0).$$

Si può definire una relazione di equivalenza in $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$, ponendo

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{def}{\iff} (x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge a } 0.$$

Sull'insieme $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$ di tutte le successioni di Cauchy di numeri razionali
Si possono definire operazioni di somma e prodotto ponendo

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}+(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \text{e} \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}}(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Si può definire una relazione di ordine parziale in $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$ ponendo

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \le (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists n_0(n > n_0 \Rightarrow y_n - x_n \ge 0).$$

Si può definire una relazione di equivalenza in $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$, ponendo

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{def}{\Longleftrightarrow} (x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge a } 0.$$

Si può dimostrare che

- l'insieme quoziente $\mathbb{R} = \mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/\sim$ è un campo;
- si può porre su $\mathbb{R}$ una relazione d'ordine che lo rende un campo ordinato;
- i numeri razionali si identificano con le classi di equivalenza delle successioni costanti e formano un sottocampo di $\mathbb{R}$.

Numeri Reali

L'insieme $\mathbb{R}$ definito sopra è il campo dei numeri reali.

Numeri Reali

L'insieme $\mathbb{R}$ definito sopra è il campo dei numeri reali. La costruzione che abbiamo delineato dei numeri reali ha il pregio di essere generalizzabile, ma non è certo di comprensione immediata e non è facile ricavare da questa costruzione le proprietà dei numeri reali. Anche la verifica delle affermazioni fatte richiede una discreta mole di lavoro.

Numeri Reali

L'insieme $\mathbb{R}$ definito sopra è il campo dei numeri reali. La costruzione che abbiamo delineato dei numeri reali ha il pregio di essere generalizzabile, ma non è certo di comprensione immediata e non è facile ricavare da questa costruzione le proprietà dei numeri reali. Anche la verifica delle affermazioni fatte richiede una discreta mole di lavoro.

Per utilizzare i numeri reali, può essere più utile ricordare alcune proprietà che li 'caratterizzano' e da cui si possano ricavare tutte le proprietà consuete.

Diamo alcune definizioni utili nel seguito

maggiorante

Dato un insieme ordinato X ed un suo sottoinsieme non vuoto A, si dice che M è un *maggiorante* per A se $x \leq M$ per ogni $x \in A$.

estremo superiore

Dato un insieme ordinato X ed un suo sottoinsieme non vuoto A, si dice che L è un *estremo superiore* per A se è il minimo tra i maggioranti di A, ovvero $x \leq L$ per ogni $x \in A$ e se $M < L$ allora esiste $x_0 \in A$ tale che $M < x_0 \leq L$.

In generale, per un dato sottoinsieme possono non esserci maggioranti e può non esistere un estremo superiore. Ad esempio, si può dimostrare che l'insieme $A = \left\{ x \in \mathbb{Q} \,\middle|\, x > 0 \text{ e } x^2 < 2 \right\}$ è maggiorato da 2, ma non ha estremo superiore in $\mathbb{Q}$.

In generale, per un dato sottoinsieme possono non esserci maggioranti e può non esistere un estremo superiore. Ad esempio, si può dimostrare che l'insieme $A = \{\, x \in \mathbb{Q} \,\big|\, x > 0 \text{ e } x^2 < 2 \,\}$ è maggiorato da 2, ma non ha estremo superiore in $\mathbb{Q}$.

Numeri reali

I numeri reali sono un campo ordinato in cui ha estremo superiore ogni sottoinsieme non vuoto che abbia un maggiorante.

Sui numeri reali sono definite le operazioni di somma e di prodotto

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

con le seguenti proprietà; per ogni x, y, z in $\mathbb{R}$, si ha

Sui numeri reali sono definite le operazioni di somma e di prodotto

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

con le seguenti proprietà; per ogni x, y, z in $\mathbb{R}$, si ha

somma

- (associativa) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
- (commutativa) $x + y = y + x$;
- (esistenza dell'elemento neutro) $x + 0 = x = 0 + x$.
- (esistenza dell'opposto) dato x, esiste $-x$ tale che $x + (-x) = 0 = (-x) + x$.

prodotto

- (associativa) $(xy)z = x(yz)$;
- (commutativa) $xy = yx$;
- (esistenza dell'elemento neutro) $x1 = x = 1x$.
- (esistenza dell'inverso) dato $x \neq 0$, esiste x^{-1} tale che $x\,x^{-1} = 1 = x^{-1}x$.

(distributiva) $(x + y)z = xz + yz$.

Sui numeri reali è definita una relazione d'ordine $x < y$, con le proprietà

ordine

- (transitiva) per ogni x, y, z, si ha $x < y,\ y < z \ \Rightarrow\ x < z$.
- (tricotomia) dati due numeri reali x, y, una e una sola delle seguenti affermazioni è vera: $x < y$, oppure $x = y$, oppure $x > y$.

e compatibile con le operazioni algebriche

operazioni e ordine

Per ogni coppia di numeri reali x, y, si ha

$$x < y \Rightarrow x + c < y + c \quad \text{per ogni } c \in \mathbb{R}$$

$$x < y,\ c > 0 \Rightarrow xc < yc$$

Inoltre

estremo superiore

Ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ che abbia un maggiorante ha estremo superiore in $\mathbb{R}$.

Inoltre

estremo superiore

Ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ che abbia un maggiorante ha estremo superiore in $\mathbb{R}$.

Ad esempio da queste proprietà si può ricavare che, dato un numero reale positivo, a, ed un numero intero $n > 0$ esiste un unico numero reale positivo, x, tale che $x^n = a$. Infatti un tale elemento deve essere

$$x = \sup \{\, y \in \mathbb{R} \mid y > 0 \text{ e } y^n \leq a \,\}$$

ed è sufficiente dimostrare che l'insieme scritto non è vuoto ed ha un maggiorante (si ha quindi $x = \sqrt[n]{a}$).

Nei numeri reali possiamo quindi trovare le radici n-esime di tutti i numeri positivi, ma non possiamo trovare soluzioni a tutte le equazioni algebriche. Ad esempio, non ci può essere soluzione all'equazione $X^2 + 1 = 0$. Se ci fosse un tale numero, -1 sarebbe un quadrato ed in un campo ordinato tutti i quadrati sono positivi (maggiori di 0), così come 1 è positivo. Se sono positivi sia un numero che il suo opposto si ha una contraddizione con la proprietà di tricotomia.

Nei numeri reali possiamo quindi trovare le radici n-esime di tutti i numeri positivi, ma non possiamo trovare soluzioni a tutte le equazioni algebriche. Ad esempio, non ci può essere soluzione all'equazione $X^2 + 1 = 0$. Se ci fosse un tale numero, -1 sarebbe un quadrato ed in un campo ordinato tutti i quadrati sono positivi (maggiori di 0), così come 1 è positivo. Se sono positivi sia un numero che il suo opposto si ha una contraddizione con la proprietà di tricotomia.

Dunque se il nostro scopo è quello di trovare radici a tutti i polinomi, dobbiamo estendere ulteriormente il campo e rassegnarci a fare a meno della relazione d'ordine.

Nei numeri reali possiamo quindi trovare le radici n-esime di tutti i numeri positivi, ma non possiamo trovare soluzioni a tutte le equazioni algebriche. Ad esempio, non ci può essere soluzione all'equazione $X^2 + 1 = 0$. Se ci fosse un tale numero, -1 sarebbe un quadrato ed in un campo ordinato tutti i quadrati sono positivi (maggiori di 0), così come 1 è positivo. Se sono positivi sia un numero che il suo opposto si ha una contraddizione con la proprietà di tricotomia.

Dunque se il nostro scopo è quello di trovare radici a tutti i polinomi, dobbiamo estendere ulteriormente il campo e rassegnarci a fare a meno della relazione d'ordine.

Passiamo quindi a costruire i numeri complessi a partire da $\mathbb{R}$.

Numeri Complessi

numeri complessi

Il campo $\mathbb{C}$ dei *numeri complessi* è l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con le operazioni di somma e prodotto definite da

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \text{e} \quad (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

qualunque siano (a, b) e (c, d) in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Numeri Complessi

numeri complessi

Il campo $\mathbb{C}$ dei *numeri complessi* è l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con le operazioni di somma e prodotto definite da

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \text{e} \quad (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

qualunque siano (a, b) e (c, d) in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

La somma e il prodotto in $\mathbb{C}$ godono delle proprietà associativa, commutativa e distributiva.

Numeri Complessi

numeri complessi

Il campo $\mathbb{C}$ dei *numeri complessi* è l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con le operazioni di somma e prodotto definite da

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \text{e} \quad (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

qualunque siano (a, b) e (c, d) in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

La somma e il prodotto in $\mathbb{C}$ godono delle proprietà associativa, commutativa e distributiva. Esiste un elemento neutro per la somma, $0_{\mathbb{C}} = (0, 0)$,

Numeri Complessi

numeri complessi

Il campo $\mathbb{C}$ dei *numeri complessi* è l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con le operazioni di somma e prodotto definite da

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \text{e} \quad (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

qualunque siano (a, b) e (c, d) in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

La somma e il prodotto in $\mathbb{C}$ godono delle proprietà associativa, commutativa e distributiva. Esiste un elemento neutro per la somma, $0_{\mathbb{C}} = (0, 0)$, Esiste un elemento neutro rispetto al prodotto, $1_{\mathbb{C}} = (1, 0)$.

Numeri Complessi

numeri complessi

Il campo $\mathbb{C}$ dei *numeri complessi* è l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con le operazioni di somma e prodotto definite da

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \text{e} \quad (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

qualunque siano (a, b) e (c, d) in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

La somma e il prodotto in $\mathbb{C}$ godono delle proprietà associativa, commutativa e distributiva. Esiste un elemento neutro per la somma, $0_{\mathbb{C}} = (0, 0)$, Esiste un elemento neutro rispetto al prodotto, $1_{\mathbb{C}} = (1, 0)$. Dato $(a, b) \in \mathbb{C}$, il suo opposto è $-(a, b) = (-a, -b)$.

Numeri Complessi

numeri complessi

Il campo $\mathbb{C}$ dei *numeri complessi* è l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con le operazioni di somma e prodotto definite da

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \text{e} \quad (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

qualunque siano (a, b) e (c, d) in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

La somma e il prodotto in $\mathbb{C}$ godono delle proprietà associativa, commutativa e distributiva. Esiste un elemento neutro per la somma, $0_{\mathbb{C}} = (0, 0)$, Esiste un elemento neutro rispetto al prodotto, $1_{\mathbb{C}} = (1, 0)$. Dato $(a, b) \in \mathbb{C}$, il suo opposto è $-(a, b) = (-a, -b)$. Se $(a, b) \neq (0, 0)$, l'inverso è $(a, b)^{-1} = (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$.

Numeri Complessi

numeri complessi

Il campo $\mathbb{C}$ dei *numeri complessi* è l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con le operazioni di somma e prodotto definite da

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \text{e} \quad (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

qualunque siano (a, b) e (c, d) in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

La somma e il prodotto in $\mathbb{C}$ godono delle proprietà associativa, commutativa e distributiva. Esiste un elemento neutro per la somma, $0_{\mathbb{C}} = (0, 0)$, Esiste un elemento neutro rispetto al prodotto, $1_{\mathbb{C}} = (1, 0)$. Dato $(a, b) \in \mathbb{C}$, il suo opposto è $-(a, b) = (-a, -b)$. Se $(a, b) \neq (0, 0)$, l'inverso è $(a, b)^{-1} = (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$. Quindi $\mathbb{C}$ è un campo.

Il sottoinsieme di $\mathbb{C}$ formato dalle coppie $(x, 0)$, al variare di $x \in \mathbb{R}$, è chiuso rispetto alla somma e al prodotto e contiene gli elementi neutri delle due operazioni.

Il sottoinsieme di $\mathbb{C}$ formato dalle coppie $(x, 0)$, al variare di $x \in \mathbb{R}$, è chiuso rispetto alla somma e al prodotto e contiene gli elementi neutri delle due operazioni.
È un sottocampo di $\mathbb{C}$, che identifichiamo con $\mathbb{R}$.
Scriveremo liberamente x in luogo di $(x, 0)$, al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Il sottoinsieme di $\mathbb{C}$ formato dalle coppie $(x, 0)$, al variare di $x \in \mathbb{R}$, è chiuso rispetto alla somma e al prodotto e contiene gli elementi neutri delle due operazioni.
È un sottocampo di $\mathbb{C}$, che identifichiamo con $\mathbb{R}$.
Scriveremo liberamente x in luogo di $(x, 0)$, al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Sia $i = (0, 1) \in \mathbb{C}$ e osserviamo che $i^2 = (-1, 0) = -1_{\mathbb{C}}$.

Il sottoinsieme di $\mathbb{C}$ formato dalle coppie $(x, 0)$, al variare di $x \in \mathbb{R}$, è chiuso rispetto alla somma e al prodotto e contiene gli elementi neutri delle due operazioni.
È un sottocampo di $\mathbb{C}$, che identifichiamo con $\mathbb{R}$.
Scriveremo liberamente x in luogo di $(x, 0)$, al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Sia $i = (0, 1) \in \mathbb{C}$ e osserviamo che $i^2 = (-1, 0) = -1_{\mathbb{C}}$. Ogni elemento (a, b) di $\mathbb{C}$ si scrive come

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi \qquad \text{(rappresentazione algebrica).}$$

Il sottoinsieme di $\mathbb{C}$ formato dalle coppie $(x, 0)$, al variare di $x \in \mathbb{R}$, è chiuso rispetto alla somma e al prodotto e contiene gli elementi neutri delle due operazioni.
È un sottocampo di $\mathbb{C}$, che identifichiamo con $\mathbb{R}$.
Scriveremo liberamente x in luogo di $(x, 0)$, al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Sia $i = (0, 1) \in \mathbb{C}$ e osserviamo che $i^2 = (-1, 0) = -1_{\mathbb{C}}$. Ogni elemento (a, b) di $\mathbb{C}$ si scrive come

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi \qquad \text{(rappresentazione algebrica).}$$

- Il numero complesso i è detto l'*unità immaginaria*
- i numeri reali a e b sono detti, rispettivamente, la *parte reale* e la *parte immaginaria* del numero complesso $a + bi$.

In simboli, $a = \Re(a + ib)$ e $b = \Im(a + ib)$.

Vi è una corrispondenza biunivoca $^{-}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, che associa a ogni numero complesso $z = a + bi$ il suo *coniugato* $\bar{z} = a - ib$. Per ogni coppia di numeri complessi, z e w, si ha

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \quad \text{e} \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Vi è una corrispondenza biunivoca $^{-}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, che associa a ogni numero complesso $z = a + bi$ il suo *coniugato* $\bar{z} = a - ib$. Per ogni coppia di numeri complessi, z e w, si ha

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \quad \text{e} \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

$\bar{z} = z$ se, e solo se, $z \in \mathbb{R}$. $\quad \Re z = \frac{z+\bar{z}}{2}$ e $\Im z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.

Esercizio

Dimostrare che un'applicazione biunivoca, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tale che $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$ e $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ è necessariamente l'identità.

modulo di un numero complesso

Il *modulo* (o valore assoluto) di un numero complesso, $z = a + bi$, è il numero reale (non negativo)

$$|z| = \sqrt{\bar{z}z} = \sqrt{(a - bi)(a + bi)} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

modulo di un numero complesso

Il *modulo* (o valore assoluto) di un numero complesso, $z = a + bi$, è il numero reale (non negativo)

$$|z| = \sqrt{\bar{z}z} = \sqrt{(a - bi)(a + bi)} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Il valore assoluto di $\mathbb{C}$ coincide col valore assoluto reale sul sottocampo $\mathbb{R}$. Per ogni $z \in \mathbb{C}$, $|\Re z| \leq |z|$ e $|\Im z| \leq |z|$.

proprietà del modulo

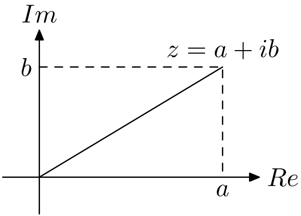
- $|z| \geq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$; e $|z| = 0$ se, e solo se, $z = 0$;
- $|z + w| \leq |z| + |w|$ per ogni coppia $z, w \in \mathbb{C}$;
- $|zw| = |z|\,|w|$ per ogni coppia $z, w \in \mathbb{C}$.

Piano di Argand-Gauss

Gli elementi di $\mathbb{C}$ sono i punti del piano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, con gli assi ortogonali. Al numero complesso $z = a + bi$ si associa il punto di coordinate (a, b).

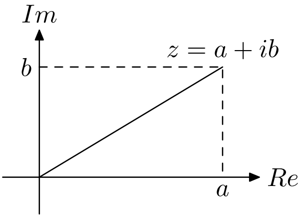
Piano di Argand-Gauss

Gli elementi di $\mathbb{C}$ sono i punti del piano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, con gli assi ortogonali.
Al numero complesso $z = a + bi$ si associa il punto di coordinate (a, b).
L'asse orizzontale, è l'*asse reale*.
L'asse verticale, è l'*asse immaginario*.



Piano di Argand-Gauss

Gli elementi di $\mathbb{C}$ sono i punti del piano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, con gli assi ortogonali. Al numero complesso $z = a + bi$ si associa il punto di coordinate (a, b).
L'asse orizzontale, è l'*asse reale*.
L'asse verticale, è l'*asse immaginario*.



Essendo gli assi ortogonali, $|a + ib|$ è la distanza del punto (a, b) dall'origine nel piano cartesiano.

Definizione (distanza)

La distanza tra due numeri complessi, z e w, è uguale a $|z - w|$.

Sia r un numero reale positivo. Nel piano di Gauss l'insieme $\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r \}$ rappresenta i punti interni alla circonferenza di centro z_0 e raggio r.

Sia r un numero reale positivo. Nel piano di Gauss l'insieme $\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r \}$ rappresenta i punti interni alla circonferenza di centro z_0 e raggio r.

Sia $z \neq 0$ un numero complesso e consideriamo $\zeta = \frac{z}{|z|}$, con $|\zeta| = 1$. Esiste quindi un unico numero reale, $\vartheta \in [0, 2\pi)$, tale che $\zeta = \cos\vartheta + i \sin\vartheta$ e si ha

$$z = |z|(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \qquad \text{(rappresentazione trigonometrica).}$$

ϑ è l'angolo formato dalla semiretta per z uscente dall'origine e la semiretta positiva dell'asse orizzontale. ϑ è l'*argomento* del numero complesso $z \neq 0$ (ed è determinato da z a meno di multipli interi di 2π).

Se $z_1 = |z_1|(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)$ e $z_2 = |z_2|(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2)$, sono numeri complessi non nulli, il loro prodotto è

$$z_1 z_2 = |z_1|(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)|z_2|(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2) = \\ |z_1 z_2|[\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)],$$

Se $z_1 = |z_1|(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)$ e $z_2 = |z_2|(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2)$, sono numeri complessi non nulli, il loro prodotto è

$$z_1 z_2 = |z_1|(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)|z_2|(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2) = \\ |z_1 z_2|[\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)],$$

In particolare, per $z_0 \neq 0$ e $n \geq 1$, si ha $z^n = z_0$ se, e solo se, $|z|^n = |z_0|$ e $n\vartheta = \vartheta_0 + 2k\pi$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$, ove $\vartheta = \operatorname{Arg} z$ e $\vartheta_0 = \operatorname{Arg} z_0$.

formula di de Moivre

$$z^n = z_0 \iff \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|z_0|} \\ \vartheta = \frac{\vartheta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n} \qquad k = 0, \dots, n-1 \end{cases}$$

Se $z_1 = |z_1|(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)$ e $z_2 = |z_2|(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2)$, sono numeri complessi non nulli, il loro prodotto è

$$z_1 z_2 = |z_1|(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)|z_2|(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2) = |z_1 z_2|[\cos(\vartheta_1+\vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)],$$

In particolare, per $z_0 \neq 0$ e $n \geq 1$, si ha $z^n = z_0$ se, e solo se, $|z|^n = |z_0|$ e $n\vartheta = \vartheta_0 + 2k\pi$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$, ove $\vartheta = \operatorname{Arg} z$ e $\vartheta_0 = \operatorname{Arg} z_0$.

formula di de Moivre

$$z^n = z_0 \iff \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|z_0|} \\ \vartheta = \dfrac{\vartheta_0}{n} + \dfrac{2k\pi}{n} \qquad k = 0, \dots, n-1 \end{cases}$$

Ci sono n radici n-esime distinte per ogni numero complesso diverso da 0, che formano i vertici di un n-gono regolare centrato nell'origine.

esponenziale complesso

Sia $z = x + iy$, con x e y reali, e poniamo

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

esponenziale complesso

Sia $z = x + iy$, con x e y reali, e poniamo

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Al variare di z in $\mathbb{C}$, $e^z \neq 0$, e si ha $e^{z+w} = e^z e^w$.

esponenziale complesso

Sia $z = x + iy$, con x e y reali, e poniamo

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Al variare di z in $\mathbb{C}$, $e^z \neq 0$, e si ha $e^{z+w} = e^z e^w$.
Per ogni numero complesso $z_0 \neq 0$, si ha

$$z_0 = |z_0| e^{i\vartheta_0} = e^{\log|z_0|} e^{i\vartheta_0} = e^{\log|z_0| + i\vartheta_0},$$

ove ϑ_0 è l'argomento di z_0 e $\log x$ indica il logaritmo naturale (in base e) del numero reale positivo x.

esponenziale complesso

Sia $z = x + iy$, con x e y reali, e poniamo

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Al variare di z in $\mathbb{C}$, $e^z \neq 0$, e si ha $e^{z+w} = e^z e^w$.
Per ogni numero complesso $z_0 \neq 0$, si ha

$$z_0 = |z_0|e^{i\vartheta_0} = e^{\log|z_0|}e^{i\vartheta_0} = e^{\log|z_0| + i\vartheta_0},$$

ove ϑ_0 è l'argomento di z_0 e $\log x$ indica il logaritmo naturale (in base e) del numero reale positivo x.
La funzione esponenziale complessa $z \mapsto e^z$ è una una funzione periodica di periodo $2\pi i$. Non è più possibile definire in modo univoco la sua funzione inversa; vi è *ambiguità* nella scelta dei valori del logaritmo.

Si chiama *determinazione principale* del logaritmo di $z_0 \neq 0$, la scelta del numero complesso $u = \log|z_0| + \vartheta_0$, che soddisfa all'equazione $e^u = z_0$ e all'ulteriore condizione $0 \leq \Im u < 2\pi$.

Si chiama *determinazione principale* del logaritmo di $z_0 \neq 0$, la scelta del numero complesso $u = \log|z_0| + \vartheta_0$, che soddisfa all'equazione $e^u = z_0$ e all'ulteriore condizione $0 \leq \Im u < 2\pi$.
Ad esempio, $i\pi$ è la determinazione principale del logaritmo di -1 e il consueto logaritmo naturale, $\log x$, è la determinazione principale del logaritmo di ogni numero reale positivo x.

Si chiama *determinazione principale* del logaritmo di $z_0 \neq 0$, la scelta del numero complesso $u = \log |z_0| + \vartheta_0$, che soddisfa all'equazione $e^u = z_0$ e all'ulteriore condizione $0 \leq \Im u < 2\pi$.
Ad esempio, $i\pi$ è la determinazione principale del logaritmo di -1 e il consueto logaritmo naturale, $\log x$, è la determinazione principale del logaritmo di ogni numero reale positivo x.
In generale, non è vero che la somma di determinazioni principali del logaritmo dia ancora una determinazione principale del logaritmo (ad esempio, $i\pi + i\pi = 2i\pi$ è la somma di due volte il logaritmo di -1. È un logaritmo di 1, ma *non* è la determinazione principale di quel logaritmo che è 0.).

I numeri complessi sono un campo *algebricamente chiuso*. Vale il cosiddetto.

Teorema fondamentale dell'Algebra

Sia $P(X)$ un polinomio di grado positivo in $\mathbb{C}[X]$. Allora esiste un numero complesso z_0 tale che $P(z_0) = 0$.

I numeri complessi sono un campo *algebricamente chiuso*. Vale il cosiddetto.

Teorema fondamentale dell'Algebra

Sia $P(X)$ un polinomio di grado positivo in $\mathbb{C}[X]$. Allora esiste un numero complesso z_0 tale che $P(z_0) = 0$.

Nel libro si trova una dimostrazione. Nella pagina web c'è il link ad una dimostrazione che usa solo argomenti di algebra lineare.

Rette e cerchi nel piano di Gauss

Si possono descrivere rette e cerchi (reali) nel piano di Gauss come luogo degli zeri di funzioni delle variabili z e $\bar{z}$ e in tal modo descrivere facilmente come si trasformano sotto l'azione di trasformazioni complesse del piano di Gauss.

Proposizione

Al variare di A e C in $\mathbb{R}$ e di b in $\mathbb{C}$, l'insieme $S = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, Az\bar{z} + b\bar{z} + \bar{b}z + C = 0 \right\}$ descrive una retta (reale), un cerchio, l'insieme vuoto o tutto il piano di Gauss.

Rette e cerchi nel piano di Gauss

Si possono descrivere rette e cerchi (reali) nel piano di Gauss come luogo degli zeri di funzioni delle variabili z e $\bar{z}$ e in tal modo descrivere facilmente come si trasformano sotto l'azione di trasformazioni complesse del piano di Gauss.

Proposizione

Al variare di A e C in $\mathbb{R}$ e di b in $\mathbb{C}$, l'insieme $S = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, Az\bar{z} + b\bar{z} + \bar{b}z + C = 0 \right\}$ descrive una retta (reale), un cerchio, l'insieme vuoto o tutto il piano di Gauss.

dim. Chiaramente, se $A = 0 = b$, l'insieme S o è vuoto (se $C \neq 0$) oppure è tutto il piano di Gauss. Supponiamo allora $\boxed{A \neq 0}$. Possiamo dividere per A e si ha

$$z\bar{z}+\frac{b}{A}\bar{z}+\frac{\bar{b}}{A}z+\frac{C}{A}=0 \iff \left(z+\frac{b}{A}\right)\left(\bar{z}+\frac{\bar{b}}{A}\right)=\frac{|b|^2-AC}{A^2} \iff \left|z+\frac{b}{A}\right|^2=\frac{|b|^2-AC}{A^2}.$$

Dunque, per le proprietà del valore assoluto complesso, l'insieme S è *vuoto* se $|b|^2 - AC < 0$, ed è uguale alla *circonferenza di centro* $-\frac{b}{A}$ *e raggio* $r = \frac{\sqrt{|b|^2-AC}}{|A|}$ altrimenti.

[segue]

Sia ora $\boxed{A = 0}$ e $b \neq 0$, per escludere i casi banali visti sopra. Distinguiamo ancora due ulteriori evenienze:

(a) se $\Im b \neq 0$, allora $z_0 = -i\frac{C}{2\Im b}$ appartiene a S, ovvero

$$C = -b\bar{z}_0 - \bar{b}z_0 \quad \text{e quindi} \quad S = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \bar{b}(z - z_0) + b(\bar{z} - \bar{z}_0) = 0 \right\}.$$

Ciò significa che $\bar{b}(z - z_0)$ è un numero immaginario (l'opposto del suo coniugato); dunque

$$\bar{b}(z - z_0) = it', \text{ con } t' \in \mathbb{R} \quad \text{e quindi} \quad S = \{ z \in \mathbb{C} \mid z = z_0 + ibt,\, t \in \mathbb{R} \};$$

ovvero i punti di S descrivono la retta del piano di Gauss passante per z_0 e parallela al vettore ib.

(b) se $\Im b = 0$, allora $b \in \mathbb{R}$ e tutti e soli i punti del tipo $z = -\frac{C}{2b} + it$, con $t \in \mathbb{R}$, appartengono a S, che è perciò la retta verticale che interseca l'asse reale nel punto $z_0 = -\frac{C}{2b}$.

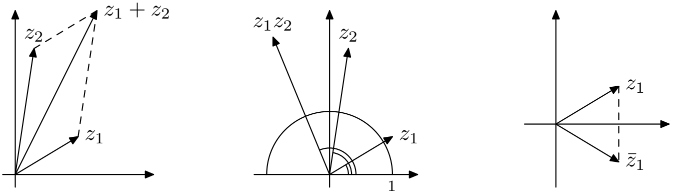
□

Trasformazioni di Möbius

Le operazioni in $\mathbb{C}$ hanno una rappresentazione geometrica nel piano di Gauss.

Trasformazioni di Möbius

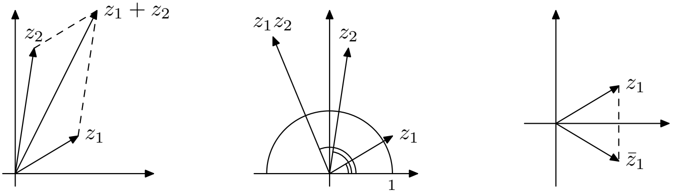
Le operazioni in $\mathbb{C}$ hanno una rappresentazione geometrica nel piano di Gauss.



La *somma* per un numero z_2 è la traslazione corrispondente a quel vettore.

Trasformazioni di Möbius

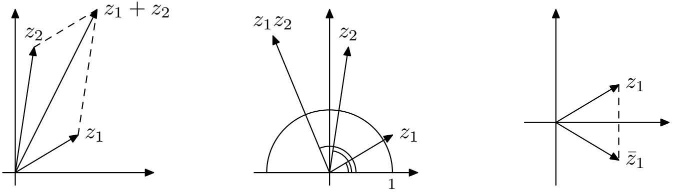
Le operazioni in $\mathbb{C}$ hanno una rappresentazione geometrica nel piano di Gauss.



La *somma* per un numero z_2 è la traslazione corrispondente a quel vettore.
Il *prodotto* per un numero $z_2 \neq 0$ è una dilatazione di rapporto $|z_2|$ seguita da una rotazione di angolo $\operatorname{Arg} z_2$.

Trasformazioni di Möbius

Le operazioni in $\mathbb{C}$ hanno una rappresentazione geometrica nel piano di Gauss.



La *somma* per un numero z_2 è la traslazione corrispondente a quel vettore.
Il *prodotto* per un numero $z_2 \neq 0$ è una dilatazione di rapporto $|z_2|$ seguita da una rotazione di angolo $\operatorname{Arg} z_2$.
Il *coniugato* di un numero complesso, z_1, è il simmetrico di z_1 rispetto all'asse orizzontale.

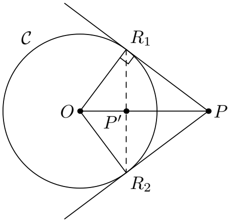
Osservazione

Componendo queste trasformazioni si ottengono tutte le *similitudini* del piano euclideo.

Osservazione

Componendo queste trasformazioni si ottengono tutte le *similitudini* del piano euclideo.

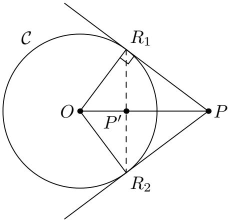
Una ulteriore importante trasformazione del piano è la *riflessione rispetto a un cerchio* o *inversione circolare*. Sia $\mathcal{C}$ un cerchio di centro O e $\lambda_{\mathcal{C}}: \mathbb{C} \setminus \{O\} \to \mathbb{C} \setminus \{O\}$ manda un punto P, esterno alla circonferenza, nel punto $P' = \lambda_{\mathcal{C}}(P)$ che si ottiene come intersezione tra la semiretta OP e la corda, R_1R_2, congiungente i due punti di tangenza delle rette uscenti da P.



Osservazione

Componendo queste trasformazioni si ottengono tutte le *similitudini* del piano euclideo.

Una ulteriore importante trasformazione del piano è la *riflessione rispetto a un cerchio* o *inversione circolare*. Sia $\mathcal{C}$ un cerchio di centro O e $\lambda_{\mathcal{C}}: \mathbb{C} \setminus \{O\} \to \mathbb{C} \setminus \{O\}$ manda un punto P, esterno alla circonferenza, nel punto $P' = \lambda_{\mathcal{C}}(P)$ che si ottiene come intersezione tra la semiretta OP e la corda, R_1R_2, congiungente i due punti di tangenza delle rette uscenti da P.



Dato un punto $P' \neq O$, interno alla circonferenza, si traccia la perpendicolare passante per P' alla semiretta OP'. Si determinano così R_1 e R_2. Il corrispondente di P' è il punto $P = \lambda_{\mathcal{C}}(P')$, intersezione delle due tangenti in R_1 e R_2.

Sia $P = z$. Il punto P' appartiene alla semiretta OP e quindi corrisponde a cz, ove $c \in \mathbb{R}_{>0}$.

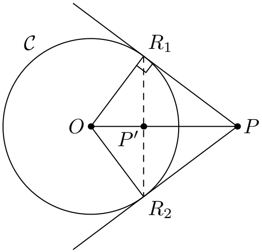
Sia $P = z$. Il punto P' appartiene alla semiretta OP e quindi corrisponde a cz, ove $c \in \mathbb{R}_{>0}$. Nel triangolo rettangolo OR_1P, si ha la proporzione $OP' : OR_1 = OR_1 : OP$, e quindi $|cz||z| = 1$ (la circonferenza ha raggio $OR_1 = 1$)

Sia $P = z$. Il punto P' appartiene alla semiretta OP e quindi corrisponde a cz, ove $c \in \mathbb{R}_{>0}$. Nel triangolo rettangolo OR_1P, si ha la proporzione $OP' : OR_1 = OR_1 : OP$, e quindi $|cz||z| = 1$ (la circonferenza ha raggio $OR_1 = 1$)

Si ottiene così l'espressione analitica

$$\lambda(z) = cz = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{\bar{z}},$$

che vale anche per i punti interni (diversi dal centro).



Le funzioni del tipo $z \mapsto az + b$ si dicono *funzioni affini* e sono tutte e sole le similitudini dirette del piano euclideo.

Le funzioni del tipo $z \mapsto az + b$ si dicono *funzioni affini* e sono tutte e sole le similitudini dirette del piano euclideo.

La funzione $F(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ è affine se $c = 0$. Altrimenti è composizione di funzioni affini e dell'inversione; ovvero $F(z) = f(g(h(z)))$ ove $\delta = ad - bc$ e

$$h(z) = cz + d, \qquad g(z) = \frac{1}{z}, \qquad f(z) = \frac{a}{c} - \frac{\delta z}{c}.$$

Le funzioni del tipo $z \mapsto az + b$ si dicono *funzioni affini* e sono tutte e sole le similitudini dirette del piano euclideo.

La funzione $F(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ è affine se $c = 0$. Altrimenti è composizione di funzioni affini e dell'inversione; ovvero $F(z) = f(g(h(z)))$ ove $\delta = ad - bc$ e

$$h(z) = cz + d, \qquad g(z) = \frac{1}{z}, \qquad f(z) = \frac{a}{c} - \frac{\delta z}{c}.$$

Siano α e z_0 in $\mathbb{C}$, con $|\alpha| = 1$. La *riflessione nella retta* r, parallela ad α e passante per z_0, è

$$\sigma_r(z) = z_0 + \alpha^2(\bar{z} - \bar{z}_0).$$

Le funzioni del tipo $z \mapsto az + b$ si dicono *funzioni affini* e sono tutte e sole le similitudini dirette del piano euclideo.

La funzione $F(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ è affine se $c = 0$. Altrimenti è composizione di funzioni affini e dell'inversione; ovvero $F(z) = f(g(h(z)))$ ove $\delta = ad - bc$ e

$$h(z) = cz + d, \qquad g(z) = \frac{1}{z}, \qquad f(z) = \frac{a}{c} - \frac{\delta z}{c}.$$

Siano α e z_0 in $\mathbb{C}$, con $|\alpha| = 1$. La *riflessione nella retta* r, parallela ad α e passante per z_0, è

$$\sigma_r(z) = z_0 + \alpha^2(\bar{z} - \bar{z}_0).$$

Siano z_0 in $\mathbb{C}$ e $0 < r \in \mathbb{R}$. La *riflessione nel cerchio* C, di centro z_0 e raggio r, è

$$\lambda_C(z) = z_0 + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{z}_0}.$$

trasformazioni di Möbius

Le trasformazioni di Möbius sono tutte e sole le trasformazioni che si ottengono componendo un numero finito di similitudini e riflessioni rispetto a cerchi o rette.

trasformazioni di Möbius

Le trasformazioni di Möbius sono tutte e sole le trasformazioni che si ottengono componendo un numero finito di similitudini e riflessioni rispetto a cerchi o rette.

Sono quindi tutte le trasformazioni che si ottengono componendo (eventualmente) il coniugio con una trasformazione lineare fratta $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, con $\delta = ad - bc \neq 0$ (quando $\delta = 0$, la funzione perde di senso o diviene costante).

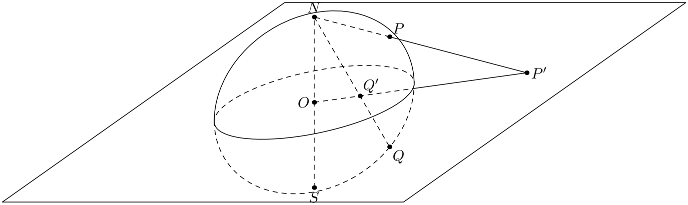
trasformazioni di Möbius

Le trasformazioni di Möbius sono tutte e sole le trasformazioni che si ottengono componendo un numero finito di similitudini e riflessioni rispetto a cerchi o rette.

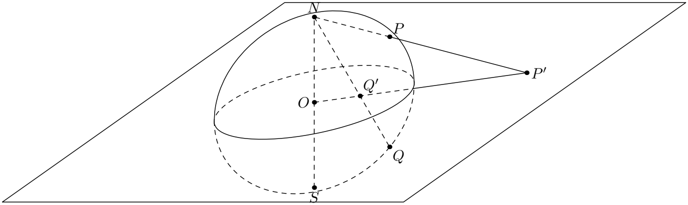
Sono quindi tutte le trasformazioni che si ottengono componendo (eventualmente) il coniugio con una trasformazione lineare fratta $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, con $\delta = ad - bc \neq 0$ (quando $\delta = 0$, la funzione perde di senso o diviene costante).

Proposizione

Le trasformazioni di Möbius formano un gruppo (rispetto alla composizione di funzioni) e mandano cerchi o rette in cerchi o rette.



Tramite la proiezione stereografica, possiamo identificare i punti della sfera con l'insieme $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.



Tramite la proiezione stereografica, possiamo identificare i punti della sfera con l'insieme $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Alla trasformazione di Möbius $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, con $ad - bc \neq 0$, possiamo associare la biiezione $f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ definita da

$$f(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{d} & \text{se } z \in \mathbb{C} \\ \infty & \text{se } z = \infty \end{cases}$$

se $c = 0$

$$f(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{se } z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \\ \infty & \text{se } z = -d/c \\ \frac{a}{c} & \text{se } z = \infty \end{cases}$$

se $c \neq 0$

Spesso in letteratura si dà il nome di *trasformazioni di Möbius* alle sole trasformazioni lineari fratte e il gruppo più generale descritto sopra è detto gruppo delle trasformazioni di Möbius topologiche o *Gruppo Inversivo* .

Spesso in letteratura si dà il nome di *trasformazioni di Möbius* alle sole trasformazioni lineari fratte e il gruppo più generale descritto sopra è detto gruppo delle trasformazioni di Möbius topologiche o *Gruppo Inversivo* .

Il motivo di questo nome è nella seguente

Proposizione

Tutte le trasformazioni di Möbius si possono ottenere componendo un numero finito di riflessioni rispetto a cerchi o rette .
Le trasformazioni lineari fratte sono composizione di un *numero pari* di riflessioni.

Per dimostrare la Proposizione basta osservare che le applicazioni affini e l'inversione $(z \mapsto 1/z)$ sono composizione di un numero pari di riflessioni in rette o cerchi. Infatti

Per dimostrare la Proposizione basta osservare che le applicazioni affini e l'inversione $(z \mapsto 1/z)$ sono composizione di un numero pari di riflessioni in rette o cerchi. Infatti

- La composizione delle riflessioni rispetto a due rette parallele coincide con la traslazione tramite un vettore ortogonale alle due rette e di lunghezza uguale al doppio della distanza tra le due rette.

Per dimostrare la Proposizione basta osservare che le applicazioni affini e l'inversione $(z \mapsto 1/z)$ sono composizione di un numero pari di riflessioni in rette o cerchi. Infatti

- La composizione delle riflessioni rispetto a due rette parallele coincide con la traslazione tramite un vettore ortogonale alle due rette e di lunghezza uguale al doppio della distanza tra le due rette.
- La composizione delle riflessioni rispetto a due rette incidenti nel punto z_0, coincide con la rotazione attorno a z_0 di un angolo doppio dell'angolo tra le due rette.

Per dimostrare la Proposizione basta osservare che le applicazioni affini e l'inversione $(z \mapsto 1/z)$ sono composizione di un numero pari di riflessioni in rette o cerchi. Infatti

- La composizione delle riflessioni rispetto a due rette parallele coincide con la traslazione tramite un vettore ortogonale alle due rette e di lunghezza uguale al doppio della distanza tra le due rette.
- La composizione delle riflessioni rispetto a due rette incidenti nel punto z_0, coincide con la rotazione attorno a z_0 di un angolo doppio dell'angolo tra le due rette.
- La composizione delle riflessioni rispetto alle circonferenze centrate nell'origine e di raggi r_1, r_2 coincide con la dilatazione di fattore uguale al rapporto tra i due raggi.

Per dimostrare la Proposizione basta osservare che le applicazioni affini e l'inversione $(z \mapsto 1/z)$ sono composizione di un numero pari di riflessioni in rette o cerchi. Infatti

- La composizione delle riflessioni rispetto a due rette parallele coincide con la traslazione tramite un vettore ortogonale alle due rette e di lunghezza uguale al doppio della distanza tra le due rette.
- La composizione delle riflessioni rispetto a due rette incidenti nel punto z_0, coincide con la rotazione attorno a z_0 di un angolo doppio dell'angolo tra le due rette.
- La composizione delle riflessioni rispetto alle circonferenze centrate nell'origine e di raggi r_1, r_2 coincide con la dilatazione di fattore uguale al rapporto tra i due raggi.
- L'inversione $z \mapsto 1/z$ è composizione della riflessione nella circonferenza unitaria con la riflessione rispetto all'asse reale.