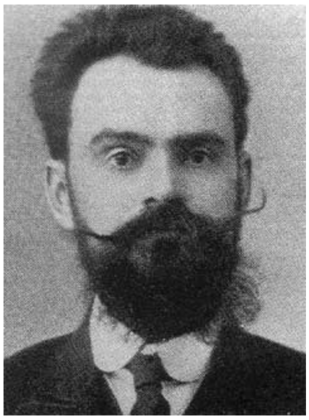
Cenno storico-critico sulla genesi dei concetti fondamentali della Geometria Proiettiva

Queste brevi note sono tratte dal volume *Lezioni di Geometria Proiettiva* (Zanichelli–Bologna, 1898) di Federigo Enriques (1871-1946). L'opera completa di Enriques sta trovando una collocazione nel sito `http://enriques.mat.uniroma2.it` dell'Università di Roma, Tor Vergata. Rimandiamo a quel sito anche per maggiori informazioni sulla biografia e sulle attività di un Geometra italiano, perseguitato dalle leggi razziali. Le immagini dei matematici che compaiono nel testo sono riprese dal sito `http://www.gap-system.org/~history/` dell'University of St. Andrews in Scozia, che contiene una ricchissima serie di biografie di Matematici.



È utile gettare un rapido sguardo alla genesi dei principali concetti che stanno alla base della Geometria Proiettiva.

1. Sebbene la Geometria Proiettiva, intesa come scienza, appartenga al secolo XIX, se ne possono riconoscere i germi fino nella *Prospettiva* di Euclide e di Eliodoro. Col fiorire delle arti, e segnatamente della pittura e dell'architettura, nel Rinascimento, la Prospettiva ebbe numerosi cultori come L.B: Alberti e Leonardo da Vinci; Guido Ubaldo del Monte ne dimostrava più tardi i principi matematici (1600)[(1)] La considerazione delle figure geometriche dal punto di vista della Prospettiva, tende a porre in rilievo le loro proprietà grafiche, discernendole dalle proprietà metriche e induce così ad una concezione più generale delle figure stesse. Inoltre, nella prospettiva sono implicitamente contenute le due *operazioni del proiettare e del segare*, fondamentali per la Geometria Proiettiva. La prime operazione trova infatti riscontro nel processo della visione, per cui si conducono dal centro dell'occhio (centro di proiezione) tutti i raggi luminosi che vanno ai punti di una figura; e la seconda operazione corrisponde alla formazione dell'immagine della figura veduta sopra un quadro assegnato (piano di sezione). Sembra che spetti a Desargues (1593–1661) e a Pascal (1623–1662) il merito di aver applicato nella Geometria, e segnatamente nella teoria delle coniche, i metodi della Prospettiva[(2)].

Le coniche erano state considerate dagli antichi come sezioni del cono circolare retto, e più generalmente da Apollonio (247 AC) anche come sezioni d'un cono circolare obliquo; questo geometra aveva dato di esse uno studio approfondito, ponendo in luce molte delle più belle proprietà. Ma non pare che alcuno, prima di Desargues, abbia avuto l'idea feconda di cercare il fondamento comune delle proprietà delle coniche nel fatto che esse sono proiezioni di un cerchio.

Tale concezione sta a base delle trattazioni di Desargues (1639) e Pascal (1640), mirabili non meno per l'originalità dei punti di vista che per i nuovi ed importanti resultati. Ma ciò che a noi preme di rilevare è come l'introduzione dei metodi della Prospettiva nello studio delle coniche appaia rispondente allo spirito di generalità, che animava oramai le ricerche scientifiche, mentre le anguste divisioni della Geometria dei Greci più non soddisfacevano al bisogno di raggruppare molte verità in una sola e di farle scaturire in modo più luminoso da uno stesso principio.

La concezione di Desargues permetteva di considerare come rientranti in una sola famiglia le tre specie di coniche (ellisse, iperbole, parabola) che per lo innanzi erano state tenute distinte, e ciò conformememnte alla considerazione dei punti impropri, dovuta allo stesso Desargues. Abbiamo già spiegato la genesi psicologica dell'idea di riguardare due rette parallele come aventi comune un punto all'infinito[(3)]. Certo la spiegazione di questa genesi non serve a giustificare con tutto rigore l'uso dei punti impropri nella Geometria; né si si sa, d'altra parte, quale giustificazione ne desse il Desargues, che probabilmente si riferiva (come esplicitamente fece il Leibniz) a delle nozioni di continuità. Ma la nominata giustificazione esige un esame critico delle proposizioni fondamentali della scienza che può essere dato soltanto dal maturo spirito d'analisi proprio dei nostri tempi. D'altronde nel metodo delle proiezioni i punti impropri si presentano da sè, ed, in quanto non ci si scosti dal detto metodo, trovano in esso il fondamento del loro legittimo uso. E la storia della

(1) Si può consultare a questo proposito la *Histoire des Sciences Mathématiques in Italie* di Guglielmo Libri (Parigi – Jules Renouard et C. 1838)

(2) Cfr. Chasles: *Aperçu historique sur l'origine et le developpement des méthodes en Gèométrie…*, (Bruxelles, 1837)

(3) L'idea analoga di considerare due piani paralleli come aventi comune una retta all'infinito è molto posteriore (dovuta a Poncelet)

Matematica ci avverte che tutti i concetti fondamentali, venuti ad allargare le idee dominanti nei vari campi di essa, sono stati introdotti nella scienza in modo analogo, trovando solo più tardi la loro piena ed esatta giustificazione[4].

2. Lo spirito di generalità di cui si è riconosciuto un'esplicazione nei metodi geometrici di Desargues e di Pascal, ha la sua più alta espressione nella Geometria Analitica creata da DesCartes, coll'applicazione dell'algebra alla teoria delle curve, nel 1637. Prescindendo dall'uso delle figure e ravvicinando, sotto uno stesso tipo di equazione, enti geometrici di forma differente, si veniva ad introdurre nella Geometria quello stesso carattere di astrazione e di universalità, che è proprio dei procedimenti analitici. L'attrattiva che la nuova scienza esercitò sugli spiriti più elevati fu così potente, che, quindi innanzi, per un lungo periodo di tempo, ogni altro metodo d'investigazione geometrica fu quasi negletto. Così, in conseguenza del rinnovamento portato nelle Matematiche dalle idee di DesCartes, mentre nasceva il *Calcolo Infinitesimale*, l'indirizzo di Desargues e di Pascal ebbe pochi continuatori. Sono tuttavia da citare i nomi di De la Hire (1640–1718) e di Le Poivre (1704), geometri che riattaccandosi in parte al citato indirizzo, ed in parte alla geometria degli antichi, arricchirono di bei risultati la teoria delle coniche. In particolare De la Hire pose i fondamenti della teoria della polari, che pare fosse contenuta solo in germe nell'opera di Pascal, e che, ad ogni modo, non era stata tramandata dopo di lui. Ancora ricorderemo il *Traité de Perspective* di Lambert (1750), nel quale sono fatte applicazioni del metodo delle proiezioni ad uso tecnico, come già Desargues insegnò, trattando numerosi problemi di Gnomonica, ecc.


Girard Desargues (1591-1661)
Blaise Pascal (1623-1662)

3. Ma, se lo spirito analitico aveva dominato quasi sovrano nella Geometria durante il secolo successivo alle scoperte di DesCartes e di Leibniz, la reazione, osserva l'Hankel[5], non poteva mancare. Essa si riattaccava più da vicino alla tecnica che alla scienza. Le arti e le industrie ed i problemi della Prospettiva, della Gnomonica, del taglio delle pietre, delle macchine, che le interessano, esigevano soluzioni più spedite e dirette, rispondenti ai progrediti bisogni; né in questo la tecnica del disegno poteva venire sostituita da procedimenti analitici.

Abbracciando insieme questi problemi tecnici in una teoria scientifica, Monge creò la *Geometria descrittiva* (1795), nella quale egli seppe fondere armonicamente vari indirizzi della Matematica pura e applicata (sublime caratteristica di un uomo di genio!). E quanto anche nella teoria egli si sia levato in alto, viene attestato dal fatto che egli "potè fare dell'Algebra colla Geometria, come Cartesio aveva fatto della Geometria coll'Algebra"[6]. Nella Geometria di Monge e della sua scuola non c'è ancora la Geometria Proiettiva. Ivi si fa uso sistematico del metodo delle proiezioni ortogonali. Ma i concetti analitici, profondamente assimilati e luminosamente trasformati, hanno ormai portato ad un più alto grado di generalità la concezione degli enti geometrici coll'introduzione degli elementi *immaginari* e con quella del *principio di continuità*, di cui Poncelet doveva fare più tardi un uso così fecondo, sia pure che non riuscisse a giustificarlo in modo del tutto soddisfacente.


Gaspard Monge (1746-1818)
Jean-Victor Poncelet (1788-1867)

Ed ecco la *Gèométrie de Position* di Carnot (1803), ispirata a questa più vasta concezione degli enti geometrici, nella quale, ad esempio, appare generalizzato il concetto del quadrilatero (semplice) noto agli antichi, colla considerazione del *quadrilatero completo*, cui si aggiunse più tardi il *quadrangolo completo*.

La citata *Gèométrie de Position* e l'*Essai sur la theorie des transversales* del medesimo autore, debbono essere (secondo lo Chasles) ravvicinati all'opera di Monge, in quanto questi lavori si vogliano riattaccare ai metodi di Desargues, Pascal, De la Hire e Le Poivre, e considerarli come una continuazione di essi nel duplice ordine di relazioni grafiche (o descrittive) e metriche, ormai differenziatesi.

Ma l'opera di Monge, come quella che conteneva una generalizzazione immensa dei metodi della Prospettiva, e poneva in una stretta relazione di reciproca dipendenza la Geometria del piano e dello spazio, deve considerarsi come la più efficace preparazione della nuova scienza che ha permesso più tardi di penetrare tutti i rami della Geometria e sostituirvi con successo i procedimenti della Geometria degli antichi.

---

(4) Così si dica p.e. relativamente all'introduzione nell'Algebra dei numeri irrazionali, negativi e complessi, venuti ad allargare il primitivo campo dell'Aritmetica.

(5) Cfr. la prefazione storica del suo libro *Die Elemente der projektivischen Geometrie* (Teubner–Leipzig 1875)

(6) Cfr Chasles, *Aperçu historique…*

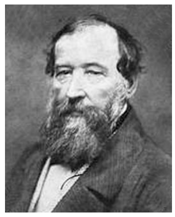
4. La scienza nuova preparata da tanti elementi, la *Geometria Proiettiva* propriamente detta, sorge col *Traité des propriètés projectives des figures* di Poncelet (1822). Nel quale trattato si fa uso sistematico delle proiezioni e sezioni intese nel senso più generale, e si ricercano appunto sistematicamente quelle proprietà delle figure piane, che hanno carattere di invarianza rispetto alle operazioni nominate (*proprietà proiettive*); tra queste si trovano in prima linea le proprietà grafiche, e quindi le proprietà metriche che si riattaccano alla nozione del *rapporto anarmonico* (o *birapporto*).

Tutta l'opera di Poncelet è dominata dall'idea di ricondurre, mediante proiezioni, lo studio delle figure piane a quello di qualche caso particolare notevole; così lo studio delle coniche a quello del cerchio (come già Desargues e Pascal), lo studio di un quadrilatero a quello di un parallelogramma, ecc. Inoltre a Poncelet si deve la considerazione generale dell *omologia solida*, fondamento della Prospettiva in rilievo, mentre l'omologia piana (che si riattacca al Teorema dei triangoli omologici, dovuto a Desargues, ed ora più semplicemente dimostrato col metodo di Monge) già si trova considerata da De la Hire per dedurre le coniche dal cerchio.

Un alto interesse deve anche essere attribuito allo sviluppo dato da Poncelet alla teoria della *polarità* rispetto ad una conica, teoria di cui abbiam detto doversi al De la Hire i teoremi fondamentali. E segnatamente un merito di Poncelet di avere concepito la polarità come uno strumento generale e fecondo per dedurre sistematicamente nuove proprietà (grafiche e metrico-proiettive) delle figure. Questo strumento permise, p.e. al Brianchon di dedurre dal teorema di Pascal sull'esagono iscritto ad una conica, il teorema sull'esalatero circoscritto, che porta il suo nome.

Ma vi è nell'uso di queste considerazioni qualche cosa di più che un metodo conducente alla scoperta di nuove proprietà geometriche; Gergonne (autore degli *Annales de Mathèmatiques* dal 1810 al 1831) assorgeva da esse ad uno dei più bei principi della moderna Geometria: il *principio di dualità*.

5. Di poco posteriore all'opera di Poncelet, colla quale sorge in Francia la Geometria proiettiva, è il *Barycentrische Calcul* di Möbius (1827) che, seguendo un indirizzo analitico–proiettivo, porta un nuovo importante contributo a questa scienza.

August Möbius (1790-1868)
Jakob Steiner (1796-1863)

Si deve a Möbius uno dei concetti fondamentali della moderna Geometria, cioè il concetto generale di *corrispondenza biunivoca* o *trasformazione*, nel piano e nello spazio. Ed anche a Möbius stesso appartiene la considerazione di quelle particolari corrispondenze che stanno a base della Geometria proiettiva: le *omografie* o *collineazioni*. Esse occupano nella Geometria proiettiva un posto analogo a quello che spetta al concetto del *movimento* nella Geometria metrica. Come il movimento permette di mutare la posizione di una figura dello spazio, senza alterarne le reciproche relazioni metriche (che comprendono *tutte* le relazioni considerate dal geometra), così l'omografia fornisce una trasformazione della figure, per la quale in generale non tutte le relazioni di esse, ma soltanto le relazioni grafiche (e le metrico–proiettive) vengono mantenute. Ed anzi le omografie sono, fra le corrispondenze biunivoche, le sole che siano dotate della proprietà di conservare le relazioni grafiche, giacché queste relazioni hanno come contenuto essenziale l'appartenersi di punti e piani o di punti e rette, e la condizione di non alterare tale appartenenza serve appunto a definire le omografie tra spazi o piani.

A Möbius, abbiamo detto, si deve la considerazione generale delle omografie; conviene aggiungere che l'omografia tra due piani non differisce dal riferimento mediante proiezioni e sezioni, la cui nozione si riattacca a Poncelet, e deve anche essere notato che Möbius suppose per l'omografia la condizione di continuità, proprietà che può invece esser dedotta dalla definizione, dato il teorema fondamentale di Staudt.

Ma, non solo le omografie, bensì anche le *correlazioni* o *reciprocità* includenti il concetto del cambio di elemento (esteso poi immensamente dal Plücker), trovano posto nell'opera di Möbius; nella quale dunque figurano per la prima volta in tutta la loro estensione, le *proiettività* come oggi si considerano nella Geometria proiettiva.

6. Accanto a Möbius deve essere posto tra i fondatori della Geometria proiettiva lo Steiner(7), di cui la *Systematische Entwickelung...* fu pubblicata nel 1832. Le proiettività assunsero nelle sue mani un nuovo ufficio, dando luogo alla generazione delle figure geometriche; così p.es. è dovuta allo Steiner la *generazione*

(7) Egli fu uno dei più fecondi ingegni geometrici di tutti i tempi. Con lui si apre un nuovo periodo nella storia della Geometria coll'inizio della *Geometria Superiore*, che per opera di Chasles, Plücker, Cayley, Cremona, Clebsch, ecc. raggiunse presto uno sviluppo elevato.

proiettiva delle coniche che abbraccia dentro di sé la *descrizione organica* di Newton, ecc. Ed anche sotto questo aspetto l'ufficio delle proiettività può essere paragonato a quello del movimento.

Il cerchio, la sfera, il cilindro ed il cono di rotazione traggono origine in differenti modi dal movimento di un elemento generatore, in modo analogo molte curve, superficie, ecc. (le coniche, le quadriche, le cubiche gobbe, le superficie del terz'ordine, ecc.) ammettono semplici generazioni mediante proiettività tra forme fondamentali, e possono essere facilmente studiate per questa via.

Karl Georg Von Staudt (1798-1867)
Julius Plücker (1801-1868)

7. Se ora gettiamo uno sguardo alla Geografia proiettiva, quale essa, per opera specialmente di Poncelet, Möbius e Steiner, si è formata, vediamo che, mentre i suoi principali risultati si sono venuti distinguendo da quelli della Geometria metrica, la dimostrazione di molte proposizioni grafiche viene ancor fatta ricorrendo al concetto di misura. Ora, mentre le nozioni grafiche si basano sopra un minor numero di concetti e di postulati, si introducono così dei concetti e dei postulati nonnecessari che limitano inutilmente la generalità della scienza. E non si pone in rilievo l'intimo spirito, che pure la scienza ha fatto nascere, per cui due figure proiettive vengono concepite come perfettamente analoghe a due figure uguali nell'antica Geometria. Studiate sotto questo aspetto, con istrumenti confacenti all'indole delle proprietà che si indagano, tali figure dovranno presentare le stesse difficoltà di studio, così p. es. il cerchio non apparirà più semplice di una conica qualsiasi, sicché non converrà ricondurre alla definizione di esso la definizione delle coniche, di cui le proprietà grafiche (o le proiettive) scaturiranno invece in modo più naturale e luminoso da una definizione generale *proiettiva*, come quelle dovute a Steiner o a Staudt.

Lo scopo di rendere indipendente nei suoi metodi e nei suoi principi la Geometria proiettiva dalla metrica, caratterizza l'ultimo periodo dell'evoluzione della nuova scienza, nel quale, per opera di Staudt[(8)], essa ha ricevuto il suo assetto definitivo.

Il problema fondamentale a cui si collega il raggiungimento del fine menzionato, si può far consistere nella determinazione della proiettività tra due rette. Se tale proiettività vien definita come un riferimento mediante proietzioni e sezioni, si riconosce subito che essa resta determinata da tre coppie di punti omologhi, basandosi sulla costanza del birapporto di quattro punti per le operazioni citate; ma si introduce così, nella dimostrazione, un concetto metrico da cui si vuole invece prescindere.

Ora la via da seguire si presenta spontanea allorché si fissi l'attenzione sulla omografia fra due piani (o spazi). Due rette omologhe diquesti piani risultatno riferite fra loro in una corrispondenza biunivoca, di cui lo studio appare subito interessante, sia per penetrare più addentro nella considerazione dell'omografia, sia perché tale corrispondenza si presenta a prima vista come una apparente generalizzazione della proiettività definita mediante proiezioni e sezioni. Infatti, si dimostra subito che la citata corrispondenza gode della proprietà di conservare i gruppi armonici, cioè di lasciare invariato il valore del birapporto di quattro punti ogni qual volta esso sia -1; sorge quindi la questione se il detto birapporto resti invariato sempre, anche quando ha un valore qualunque diverso da -1; in altre parole, sorge la questione se, data tra due rette una corrispondenza biunivoca che conservi i gruppi armonici, essa equivalga ad un riferimento delle due rettemediante proiezioni e sezioni. Si è così condotti alla questione fondamentale, cui Staudt ha dato risposta affermativa, dimostrando quella proposizione che ha ricevuto appunto il nome di *teorema fondamentale della proiettività*.

Per tal modo, la nozione di gruppo armonico, che può esser posta graficamente mediante il quadrangolo (Desargues) e corrisponde d'altra parte ad una così semplice definizione metrica, è divenuta la base dell'edificio innalzato dallo Staudt, essendo presa da lui come punto di partenza di una nuova definizione della proiettività fra due rette (o forme di I^0 specie). La quale definizione, appunto perché sorta dallo studio dell'omografia, presenta considerevoli vantaggi nella trattazione di questa, permettendo di eliminare la superflua condizione di continuità che Möbius vi aveva introdotto.

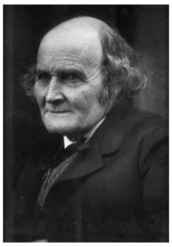
Con Staudt le relazioni grafiche, che costituiscono la parte sostanziale della Geometria proiettiva, vengono ordinate in un corpo di dottrina completamente distinta da quello delle proprietà metriche. Tale purezza di metodo rende possibile l'esame critico dei postulati della nuova scienza (Klein, Lüroth e Zeuthen, Darboux, Pasch, de Paolis, ecc.), e ne fa riconoscere il grande carattere di generalità, per cui essa abbraccia

(8) *Geometrie der Lage* (1847), *Bei träge zur Geometrie der Lage* (1856-57-60). Della vita e l'opera di Staudt discorre il Segre in uno studio che precede la trduzione italiana della *Geometria di posizione* (Torino, Bocca, 1889).

entro di sé anche la Geometria (non-euclidea) che prescinde dal postulato di Euclide sulle parallele (Cayley, Klein).

Inoltre, il *principio di dualità*, primitivamente dedotto da una trasformazione delle figure per reciprocità, appare ormai dimostrato *a priori* dal fatto che gli elementi fondamentali entrano simmetricamente nelle proposizioni grafiche elementari che costituiscono i postulati della Geometria proiettiva.

8. Ma l'importanza attribuita alla separazione delle proprietà grafiche dalle metriche non deve far dimenticare il grande interesse di queste ultime; anzi la possibilità di subordinare sistematicamente la Geometria metrica alla proiettiva è da riguardarsi come uno dei più begli acquisti della nuova scienza. Che la speciale considerazione degli elementi impropri permetta di far scaturire relazioni metriche da relazioni proiettive (queste ultime riducibili a relazioni grafiche), appare già dai lavori di Poncelet, di Chasles ecc.; ma è grande merito di Cayley[9] avere rilevato che *tutte* le proprietà metriche delle figure si possono riguardare come relazioni proiettive (o grafiche) di esse con quegli enti particolari che costituiscono l'*assoluto*, cioè coi *punti ciclici* (involuzione assoluta) nel piano, con la *polarità ortogonale* nella stella e col *cerchio all'infinito delle sfere* (polarità assoluta) nello spazio.




Arthur Cayley (1821-1895)
Luigi Cremona (1830-1903)

In seguito si vide che non solo l'ordinaria Geometria euclidea, ma anche la non-euclidea poteva venire subordinata in un modo analogo alla Geometria proiettiva (Klein in relazione a Cayley – 1871). E gli scambievoli rapporti della Geometria proiettiva con la metrica apparvero lumeggiati dal confronto dell'indirizzo proiettivo colle memorabili ricerche di Riemann, Beltrami, Schläfli, mediante l'introduzione del concetto fondamentale di *gruppo di trasformazioni* (Klein, Lie).

9. Traendo le sue origini da problemi essenzialmente tecnici della Prospettiva, della Gnomonica, ecc., la Geometria proiettiva è venuta sorgendo dal campo della pratica al campo di una teoria sempre più elevata e feconda che sta a fondamento dei successivi sviluppi della Geometria superiore. Essa ha seguito così la legge universale di evoluzione delle scienze, che consiste appunto in un processo di astrazione e generalizzazione. Ma, come le altre scienze, anche la Geometria proiettiva, corrispondentemente al suo progresso teorico, ha veduto allargarsi il campo delle applicazioni, riuscendo alla sua volta non solo a dare una risposta ai problemi tecnici che in principio le dettero impulso, ma portando altresì nuovi ed inattesi risultati di grande valore pratico.

Abbiamo già accennato ai numerosi problemi che ricevono la loro soluzione dai metodi descrittivi di Monge e dalla sua scuola, ed in questi abbiamo riconosciuto i germi dell'opera di Poncelet. A sua volta, all'estensione così ottenuta nell'uso delle proiezioni si deve collegare la *nuova Prospettiva* di Cousinery (1828), e l'importanza che ha acquistato nella Geometria descrittiva il *metodo delle proiezioni centrali*, da cui Fiedler ha fatto derivare tutti gli altri metodi di rappresentazione.

Ma un nuovo ordine di applicazioni si ha nel campo della *Statica grafica*. Queste sono dovute principalmente a Culmann[10] (*Lehrbuch der graphischen Statik*, Zurigo, 1866) ed a Cremona (*Le figure reciproche della statica grafica*, 1872), i quali seppero ricondurre a semplici ed eleganti costruzioni, date dalla Geometria proiettiva, numerosi problemi tecnici relativi alla fabbricazione di volte, ponti, ecc. Dalle quali applicazioni, paragonate allo svolgimento teorico della nostra scienza, sorge un grande ammaestramento confortato ad ogni passo dalla storia della Matematica. I vari rami della Matematica pura ed applicata si annodano e si collegano fra loro per vie inaspettate; e le idee, che traggono origine da elementari problemi della pratica, sembra debbano maturarsi per una lunga elaborazione di pensiero, nelle regioni più alte della teoria, prima che possano discendere feconde nel campo delle attività della vita.

(9) *A sixth memoir on Quantics* Coll. Math. pap. II. Cfr. anche Laguerre, *Note sur la théorie des foyers*, Nouvelles Annales de Mathèmatiques, 1853.

(10) In parte preceduto da Maxwell (Phil. Magazine, 1864).